3. házi feladat

1.feladat Tegyük fel, hogy a háromszög minden szöge legfeljebb $120°$.
Jelölje P azt a pontot az ABC háromszögben, amelyből mindhárom oldal $120°$ szögben látszik, és legyen X a sík egy tetszőleges pontja.
Legyen továbbá $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendre $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ irányokba mutató egységvektorok.

$$|\overrightarrow{PA}| = \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{i} = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PX}) \cdot \mathbf{i} + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{i} \leq |\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PX}| + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{i}$$

Hasonlóak adódik:

$$|\overrightarrow{PB}| \leq |\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PX}| + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{j} \text{ és } |\overrightarrow{PC}| \leq |\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PX}| + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{k}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva:

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}| \leq |\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PX}| + |\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PX}| + |\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PX}| + \overrightarrow{PX} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{AX}$, továbbá ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egymással $120°$ szöget zárnak be, akkor $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$, így a következőt kapjuk:

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}| \leq |\overrightarrow{AX}| + |\overrightarrow{BX}| + |\overrightarrow{CX}|$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy P pont éppen a keresett izogonális pont.

Ha a háromszögben van $120°$-nál nagyobb szög, akkor nem létezik olyan pont, amelyből mindhárom oldal $120°$ szögben látszik.
Legyen $\gamma \geq 120°$.
Ekkor módosítsuk az előző számolást úgy, hogy legyen $\mathbf{k} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, és $P = C$
Mivel $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ legalább 120 fokos szöget zárnak be, ezért $|\mathbf{k}| \leq 1$.

$$0 = |\overrightarrow{PC}| \leq |\overrightarrow{PX}| + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{k} = |\overrightarrow{CX}| + \overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{k}$$

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}| \leq |\overrightarrow{AX}| + |\overrightarrow{BX}| + |\overrightarrow{CX}|$$

Ami bizonyítja, hogy a keresett pont éppen C csúcs.

Szerkesztés menete:
Rajzoljunk szabályos ABR, BCP, CAQ háromszögeket az oldalakra kifelé. Ekkor AP, BQ, CR egyenesek egy pontban metszik egymást, és ez a pont az izogonális pont.

Bizonyítás:
Legyen F az RC és BQ egyenesek metszéspontja.
Könnyen lehet látni, hogy RAC és BAQ háromszögek egybevágók. Emiatt $ARF\sphericalangle = ABF\sphericalangle$ és $AQF\sphericalangle = ACF\sphericalangle$. Ami azt jelenti, hogy $ARBF$ és $AQCF$ húrnégyszögek.
Mivel húrnégyszögek, és ismerjük egy-egy $60°$-os szögüket, ezért $AFB\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 120°$. Tehát $BFC\sphericalangle = 120°$. Emiatt $BFCP$ szintén húrnégyszög, tehát $BFP\sphericalangle = BCP\sphericalangle = 60°$ ami bizonyítja, hogy P, F, A egy egyenesre esnek.

2.feladat

(a) Hegyesszögű háromszögben a minimális kerületű beírt háromszög a talpponti háromszög.

Bizonyítás:
Legyen ABC egy tetszőleges hegyesszögű háromszög, és $A'B'C'$ egy minimális kerületű beírt háromszöge ABC-nek.
$A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$
Legyen A' tükörképe b és c oldalegyenesekre rendre D, E
Legyen DE egyenes metszéspontja b, c egyenesekkel: $B", C"$.
Ekkor $K(A'B"C") = |DE| \leq K(A'B'C')$
Mivel $A'B'C'$-ről feltettük, hogy minimális beírt háromszög, ezért egyenlőségnek kell teljesülni, ami csak úgy lehetséges, ha $B' = B"$ és $C' = C"$.

Vegyük észre, hogy ADE háromszögben:
$|AD| = |AE| = |AA'|$ továbbá $DAE\sphericalangle = 2\alpha$.
Tehát $|DE|$ éppen akkor minimális, ha AA' minimális, ami ezt jelenti A' éppen az A-ból induló magasság talppontja.
Ugyanezen gondolatmenet alapján B', C' szintén talppontok.

Ha ABC nem hegyesszögű, akkor nem létezik minimális beírt háromszög, de adható éles alsó korlát a beírt háromszögek kerületére:
Legyen $\alpha \geq 90°$, A' az A-ból induló magasság talppontja.
Ekkor a beírt háromszögekre egy éles alsó korlát $2|AA'|$

(b) Egy adott $ABCD$ konvex négyszög esetén az a P pont, amelyre a csúcsoktól mért távolságok összege minimális az átlók metszéspontja.

Bizonyítás:
A sík egy tetszőleges P pontjára:
$|AP| + |PC| \geq |AC|$, ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $P \in AC$
$|BP| + |PD| \geq |BD|$, ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $P \in BD$
Tehát:
$|AP| + |BP| + |CP| + DP| \geq |AC| + |BD|$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $P \in AC \cap BD$

Legyen $ABCD$ egy adott konkáv négyszög, amelyben a D csúcsnál van a tompaszög. Ekkor az a P pont, amelyre a csúcsoktól mért távolságok összege minimális az a D csúcs.

Bizonyítás:
Legyen P egy tetszőleges pont a síkon, és tegyük fel, hogy D csúcs benne van az APB szögtartományban.
Ezt az általánosság elvesztése nélkül nyilván feltehetjük
Ekkor: $|PA| + |PB| \geq |DA| + |DB|$
Továbbá $|PC| + |PD| \geq |CD|$
Tehát: $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq |DA| + |DB| + |DC|$

3.feladat Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, legyen a beírt kör középpontja O, és az a, b, c oldalakhoz hozzáírt körök középpontja rendre A', B', C'.

Ekkor jól ismert tétel, hogy ABC háromszög szögfelezői magasságegyenesek $A'B'C'$ háromszögben. *Ezt a tételt használjuk a szerkesztésekhez*

(a) Legyen $A \in e_1$. A szerkesztés lépései:

- Állítsunk merőlegest A csúcsban e_1-re.
- Az így kapott egyenes metszéspontjai e_2, e_3 egyenesekkel megadják rendre B', C' pontokat.
- Állítsunk merőlegest B' csúcsból e_3 egyenesre. Ennek a metszéspontja e_1 egyenessel megadja A' pontot.
- Az $A'B'C'$ háromszögben a szerkesztés miatt triviális, hogy e_1, e_2, e_3 magasságegyenesek, tehát a talpponti háromszög éppen megadja a keresett ABC háromszöget.

(b) A szerkesztés lépései:

- Vegyünk fel egy tetszőleges $A^* \in e_1$ pontot.
- Az *(a)* feladat alapján szerkesszük meg azt az $A^*B^*C^*$ háromszöget, melyben e_1, e_2, e_3 szögfelezők.
- Ezt a háromszöget középpontosan nagyítva O pontból úgy hogy az oldalak érintsék S kört megkapjuk a keresett ABC háromszöget.

4.feladat

(a) Először szerkesszük meg azt a Q pontot, melyre:

$$O_2^{-30^\circ} \circ O_1^{45^\circ} = Q^{15^\circ}$$

Az O_1O_2Q háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így Q könnyen szerkeszthető:

$$O_2O_1Q\sphericalangle = 157.5^\circ$$
$$O_1O_2Q\sphericalangle = 15^\circ$$

A keresett transzformáció:

$$O_3^{-60^\circ} \circ O_2^{-30^\circ} \circ O_1^{45^\circ} = O_3^{-60^\circ} \circ Q^{15^\circ} = P^{-45^\circ}$$

Az O_3QP háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így P könnyen szerkeszthető:

$$O_3QP\sphericalangle = 7.5^\circ$$
$$PO_3Q\sphericalangle = 150^\circ$$

A feladatban szereplő összes forgatás szöge szerkeszthető szög, tehát ezen háromszögek megszerkeszthetőek.

(b) Három egymással szöget bezáró tükrözés kompozíciója csúsztatva tükrözés.
Fixegyenes szerkesztése:

- Jelölje ezt a csúsztatva tükrözést $\mathbf{T}$.
- Vegyünk fel két tetszőleges pontot P, Q a síkon.
- Szerkesszük meg $P' = \mathbf{T}(P)$ és $Q' = \mathbf{T}(Q)$ pontokat.
- $P\mathbf{T}(P)$ és $Q\mathbf{T}(Q)$ szakaszok felezőpontjai a tengelyre kell essenek, tehát ezen két pont meghatározza $\mathbf{T}$ fixegyenesét.

5.feladat Jelölje $\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b, \mathbf{T}_c$ az oldalakra való tükrözést.
Ekkor a feladat $\mathbf{T} := \mathbf{T}_c\mathbf{T}_b\mathbf{T}_c\mathbf{T}_a\mathbf{T}_c\mathbf{T}_b$ egybevágóság meghatározása.

Tegyük fel, hogy a háromszögnek ABC egy negatív körbejárása. Ekkor:
$\mathbf{T}_c\mathbf{T}_b = A^{60°}$ és $\mathbf{T}_c\mathbf{T}_a = B^{-120°}$ forgatásoknak felelnek meg, tehát:
$\mathbf{T} = A^{60°}B^{-120°}A^{60°}$

Mivel $\mathbf{T}$ előáll 3 forgatás kompozíciójaként, ahol a forgatások szögösszege 0, ezért $\mathbf{T}$ egy eltolás. Az eltolás vektorának meghatározásához célszerű B' pontot vizsgálni, ami B pont b-re vett tükörképe:
$\mathbf{T}_b(B') = B$
$\mathbf{T}_c\mathbf{T}_a\mathbf{T}_c\mathbf{T}_b(B') = B$
$\mathbf{T}_b\mathbf{T}_c\mathbf{T}_a\mathbf{T}_c\mathbf{T}_b(B') = B'$, tehát:
$\mathbf{T}(B') = \mathbf{T}_{\mathbf{c}}(B')$, ami épp $\sqrt{3}|AB|$-al tolja el B' pontot c-re merőlegesen.

Tehát $\mathbf{T}$ egy eltolás c átfogóra merőlegesen $\sqrt{3}|AB|$-al.