4. házi feladat

1.feladat Jelölje a $3x-4y+2=0$ x-tengellyel bezárt szögét α.
Ekkor a tükrözés mátrixa az eltolás nélkül:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 24\\ 24 & -7\end{bmatrix}$$

A tükrözés egy fixpontja: $P=(0,\frac{1}{2})^T$ Tehát az eltolási rész:

$$\mathbf{a}=(\mathbf{1}-\mathbf{M})P=\left(-\frac{12}{25},\frac{16}{25}\right)^T$$

Tehát a tükrözés mátrixa 2-dimenzióban homogén-koordinátákkal:

$$\mathbf{T}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 24 & -12\\ 24 & -7 & 16\\ 0 & 0 & 25\end{bmatrix}$$

Tehát a tükörkép az eredeti koordinátarendszerben:

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}$$

$$x'=\frac{1}{25}(7x+24y-12)$$

$$y'=\frac{1}{25}(24x-7y+16)$$

Visszahelyettesítve megkapjuk a görbék képének egyenleteit:
Parabola képe:

$$\frac{1}{625}(24x-7y+16)^2=\frac{1}{625}(7x+24y-12)^2-\frac{5}{25}(7x+24y-12)+6$$

Ellipszis képe:

$$\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{25}(7x+24y-12)\right)-2\right)^2+\frac{1}{9}\left(\left(\frac{1}{25}(24x-7y+16)\right)+1\right)^2=1$$

Hiperbola képe:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}(7x+24y-12)\right)^2-\left(\frac{1}{25}(24x-7y+16)+5\right)^2=1$$

2.feladat AC egyenese: $4x-3y=-12$. Erre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{M}_1=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\ 24 & 7\end{bmatrix},\ \text{Az eltolási rész: } \mathbf{a}=(\mathbf{1}-\mathbf{M}_1)C=\left(-\frac{96}{25},\frac{72}{25}\right)^T$$

Tehát a tükrözés mátrixa 2-dimenzióban homogén-koordinátákkal:

$$\mathbf{T}_1=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24 & -96\\ 24 & 7 & 72\\ 0 & 0 & 25\end{bmatrix}$$

AB egyenese: $y = 0$. Erre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ Eltolási rész nincs, mert az origó fixpont.}$$

Tehát a tükrözés mátrixa 2-dimenzióban homogén-koordinátákkal:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BC egyenese: $4x + 3y = 12$. Erre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{M}_3 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{bmatrix}, \text{ Az eltolási rész: } \mathbf{a} = (\mathbf{1} - \mathbf{M}_3)C = \left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right)^T$$

Tehát a tükrözés mátrixa 2-dimenzióban homogén-koordinátákkal:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -7 & -24 & 96 \\ -24 & 7 & 72 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Az eredő transzformáció:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & 0 & 192 \\ 0 & -25 & 144 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}(A) = \frac{1}{25}(117, 144, 25)^T$ Tehát $A' = \frac{1}{25}(117, 144)^T$
$\mathbf{T}^2(A) = \frac{1}{25}(309, 0, 25)^T$ Tehát $A'' = \frac{1}{25}(309, 0)^T$

Innen $AA'A''$ háromszög szögei és oldalai számíthatók:

$$|AA'| = |A'A''| = \frac{48}{5} \text{ és } |AA''| = \frac{384}{25}$$

Innen $\cos(A''AA'\sphericalangle) = \frac{4}{5}$, tehát a szögek:

$$A''AA'\sphericalangle = AA''A'\sphericalangle = 36°52'12\text{”} \text{ és } AA'A''\sphericalangle = 106°15'36''$$

Megjegyzés: Azt a tényt, hogy a háromszög egyenlő szárú, számolás nélkül lehet tudni abból, hogy $\mathbf{T}$ *egy csúsztatva tükrözés.*

Mivel $\mathbf{T}$ csúsztatva tükrözés, így $\mathbf{T}^2$ egy eltolás.
Az eltolás vektora: $\overrightarrow{AA''} = (\frac{384}{25}, 0)^T$

$$\mathbf{T}^{2018}(C) = (0, 4)^T + 1009\left(\frac{384}{25}, 0\right)^T = \left(\frac{387456}{25}, 4\right)^T$$

3.feladat A forgatás tengelyének irányvektora: $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$
A kocka csúcsai:

$$A = (1, 1, 1)^T, B = (-1, 1, 1)^T, C = (-1, -1, 1)^T, D = (1, -1, 1)^T$$

$$E = (1, 1, -1)^T, F = (-1, 1, -1)^T, G = (-1, -1, -1)^T, H = (1, -1, -1)^T$$

a.)

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v},120^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A csúcsok képei:

$$A' = (-1,1,-1)^T, B' = (-1,1,1)^T, C' = (1,1,1)^T, D' = (1,1,-1)^T$$

$$E' = (-1,-1,-1)^T, F' = (-1,-1,1)^T, G' = (1,-1,1)^T, H' = (1,-1,-1)^T$$

b.)

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v},60^\circ} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A csúcsok képei:

$$A' = \frac{1}{3}(1,5,-1)^T, B' = (-1,1,1)^T, C' = \frac{1}{3}(1,-1,5)^T, D' = \frac{1}{3}(5,1,1)^T$$

$$E' = \frac{1}{3}(-1,1,-5)^T, F' = \frac{1}{3}(-5,-1,-1)^T, G' = \frac{1}{3}(-1,-5,1)^T, H' = (1,-1,-1)^T$$

4.feladat Jelöljék a csúcsok helyvektorait rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$.
Legyen a keresett transzformáció 3×3-as mátrixa $\mathbf{M}$, oszlopvektorai rendre $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$.
Továbbá legyen a keresett transzformáció eltolási része $\mathbf{w}$

Ekkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{w} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{w} = \mathbf{a}'$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{w} = \mathbf{v_1} + \mathbf{w} = \mathbf{b}'$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{w} = \mathbf{v_2} + \mathbf{w} = \mathbf{c}'$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{w} = \mathbf{v_3} + \mathbf{w} = \mathbf{d}'$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}, \mathbf{v_1} = \mathbf{b}', \mathbf{v_2} = \mathbf{c}', \mathbf{v_3} = \mathbf{d}'$$

Tehát a keresett transzformáció egybevágósági mátrixa:
Mivel $\mathbf{w} = \mathbf{0}$*, így ez egy origót helybenhagyó transzformáció, tehát* $3{\times}3$*-as mátrix elég a leírásához.*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}' & \mathbf{c}' & \mathbf{d}' \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} (7-4\sqrt{3}) & (-4-7\sqrt{3}) & 8 \\ (-4+\sqrt{3}) & (1+4\sqrt{3}) & 16 \\ (-4-8\sqrt{3}) & (-8+4\sqrt{3}) & -2 \end{bmatrix}$$

5.feladat **1.rész** x+y=1 síkra tükrözés = T_1

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.rész x-y=0 síkra tükrözés = T_2, $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$

$$\mathbf{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.rész z tengely körüli 90 fokos forgatás = T_3

$$\mathbf{T_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.rész Az $(1, -1, 0)^T$ vektorral való eltolás = T_4

$$\mathbf{T_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát az eredő transzfromáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T_4 T_3 T_2 T_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y, z, 1)^T = \mathbf{T}^{-1}(x', y', z', 1)^T$, ahol $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, hiszen $\mathbf{T}$ ortogonális. Innen $x = -y'$, $y = x'$, $z = z'$ adódik, amit visszahelyettesítve megkapjuk az elliptikus paraboloid transzformáció után adódó képének egyenletét:

$$(-4y' - 1)^2 + 9(x' - 2)^2 = 72z'$$

Gyorsabb megoldás Ha észrevesszük, hogy mind a 4 transzformáció az egész $\alpha = [x, y]$ síkot önmagába képezi (nem pontonként), akkor síkban könnyű átlátni ezen transzformációk kompozícióját:
Tehát az egészet α síkban nézve: $x + y = 1$ és $x - y = 0$ egyenesek egymásra merőlegesek, metszéspontjuk $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, tehát ezek kompozíciója épp $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ pont körüli 180 fokos forgatás.
$\mathbf{T_3}$ egy origó körüli 90 fokos forgatásnak felel meg ha csak α síkot nézzük. Ezek alapján $\mathbf{T_3 T_2 T_1}$ egy 180 illetve egy 90 fokos forgatás kompozíciója, ami egy -90 fokos forgatásnak felel meg $(0, 1)^T$ pont körül. Ez a forgatás az origót épp $(-1, 1)^T$ pontba viszi, tehát $\mathbf{T_4}$ éppen "visszatolja" az origót a helyére.

Tehát $\mathbf{T} = \mathbf{T_4 T_3 T_2 T_1}$ transzformáció éppen a z tengely körüli -90 fokos forgatás.