5. házi feladat

1.feladat A csúcsok:

$$A = (0,1,1)^T, B = (0,-1,1)^T, C = (1,0,0)^T, D = (-1,0,0)^T$$

- AB, CD kitérő élpárra történő tükrözések:

$$\mathbf{T}_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{elotlási rész:} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{AB})A = (0,0,2)^T$$

$$\mathbf{T}_{CD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{elotlási rész:} (0,0,0)^T$$

Az eredő transzformáció: *mivel az origó fixpont, így nincs szükség homogénkoordinátás mátrixra*

$$\mathbf{T}_{AB}\mathbf{T}_{CD} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{CD}\mathbf{T}_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- AC, BD kitérő élpárra történő tükrözések:

$$\mathbf{T}_{AC} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{elotlási rész:} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{AC})C = \frac{1}{3}(4,2,2)^T$$

$$\mathbf{T}_{BD} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{elotlási rész:} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{BD})D = \frac{1}{3}(-4,-2,2)^T$$

Az eredő transzformáció:

$$\mathbf{T}_{AC}\mathbf{T}_{BD} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 16 \\ 8 & 1 & -4 & 20 \\ -4 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{BD}\mathbf{T}_{AC} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 & -16 \\ 8 & 1 & 4 & -20 \\ 4 & -4 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- AD, BC kitérő élpárra történő tükrözések:

$$\mathbf{T}_{AD} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{elotlási rész:} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{AD})D = \frac{1}{3}(-4, 2, 2)^T$$

$$\mathbf{T}_{BC} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \text{elotlási rész:} (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{BC})C = \frac{1}{3}(4, -2, 2)^T$$

Az eredő transzformáció:

$$\mathbf{T}_{AD}\mathbf{T}_{BC} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 & -16 \\ 8 & 1 & -4 & 20 \\ 4 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{BC}\mathbf{T}_{AD} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 16 \\ 8 & 1 & 4 & -20 \\ -4 & -4 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Két kitérő egyenesre való tükrözés szorzata egy spirálmozgás. A spirálmozgás tengelye a normáltranszverzális, szöge a két egyenes bezárt szögének kétszerese, eltolási vektora az egyenesek távolságának kétszerese.

Ezt könnyen lehet látni, ha először tekintjük azt a merőleges vetületet melynek síkjának normálvektora a normáltranszverzális irányvektora. Itt a 2D esetben tanultak alapján forgatást kapunk a bezárt szög kétszeresével. Utána tekintjük egy erre merőleges síkot (ahol az egyeneseink párhuzamos egyenesek). Ekkor a 2D esetben tanultak alapján egy eltolást kapunk a távolság kétszeresével.

Állítás:
Jelölje d két tükrözés tengelyeinek távolságát. A kompozíció eltolási részének nagysága legalább $2d$, de felső korlátot nem lehet rá adni d függvényében.
A bizonyításhoz használjuk fel, hogy az eltolási rész nagysága éppen az origó, és az origó képének távolsága.

Bizonyítás (alsó korlát):
Legyen α egy olyan sík, mely nem merőleges egyik tükrözés tengelyére sem, és tartalmazza a két tükrözés egyeneseinek normáltranszverzálisát.

Erre a síkra való merőleges vetületet vizsgálva a transzformáció két párhuzamos egyenesre való tükrözés kompozíciója, melyek távolsága d. Tehát eltolás $2d$-vel. Ez azt jelenti, hogy az eltolási rész merőleges vetülete α síkra $2d$ nagyságú. Egy vektor merőleges vetülete nem lehet hosszabb az eredeti vektornál, ezért az eltolási rész nagysága legalább $2d$.
Az alsó korlát éles. Erre példa ha a két egyenes és az origó egy síkban vannak.

Bizonyítás (felső korlátra konstrukció):
Rögzítsünk két pozitív paramétert: k, d. Tükrözzünk először az x tengelyre, majd az $(x = k, y = d)$ egyenesre. (z tengely eltolva $(k, d, 0)^T$ vektorral)
Ekkor a két egyenes távolsága d.

Az origó képe pedig: $(2k, 2d, 0)^T$.
Tehát az eltolási rész nagysága $2\sqrt{k^2+d^2}$
Ez bizonyítja az állítást, hiszen rögzített d esetén az eltolási vektor tetszőlegesen nagy lehet k választásától függően.

Megjegyzés: A spirálmozgást fel lehet bontani egy forgatási és egy eltolási részre. Valamint egy transzformáció 4x4es mátrixát fel lehet bontani egy lineáris és egy eltolási részre. Ezt a két eltolási vektor két különböző fogalom, ha egyik egyenes sem tartalmazza az origót.

2.feladat A szfenoid csúcsai:
$A=(0,1,1)^T, B=(0,-1,1)^T, C=(1,0,0)^T, D=(-1,0,0)^T$.
Könnyen meghatározható a köréírt gömb középpontja, és sugara:

$$O=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)^T \text{ és } R=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Jelölje a vetítés után keletkező gömbháromszögek oldalait és szögeit: a, b, α, β.
Minden háromszögben két b hosszú oldal, és β nagyságú szög van.

$$\cos(a)=\cos(AOB\sphericalangle)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{R^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\cos(b)=\cos(AOC\sphericalangle)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{R^2}=-\frac{1}{5}$$

Innen az oldalak:

$$a=126°52'12" = 2.2143 \text{ rad}$$

$$b=101°5'32" = 1.77215 \text{ rad}$$

Az szögek koszinusz tétellel számolhatók:

$$\cos(\alpha)=\frac{\cos(a)-\cos^2(b)}{\sin^2(b)}=-\frac{2}{3}$$

$$\cos(\beta)=\frac{\cos(b)-\cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Innen a szögek:

$$\alpha=131°48'37" = 2.3005 \text{ rad}$$

$$\beta=114°5'41" = 1.9913 \text{ rad}$$

A beírt kör sugarának meghatározásához tekintsük azt az AQF háromszöget, ahol Q pont az ABC háromszög beírt körének középpontja, F pedig az AB él felezőpontja.
Ismert adatok: $QAF\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$, mivel QA egy szögfelező.
$QFA\sphericalangle=90°$ és $|AF|=\frac{a}{2}$ szimmetria miatt.
Koszinusz tételből harmadik szög könnyen adódik.
Derékszög miatt egyszerűsödik a képlet.

$$\cos(AQF\sphericalangle)=\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)=0.37526$$

$$AQF\sphericalangle = 67°57'33" = 1.18611 \text{ rad}$$

Innen a beírt kör sugara: $r = QF$ már szinusz tételből adódik:

$$\sin(r) = \sin\left(\frac{a}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(AQF\sphericalangle)} = 0.8097$$

$$r = 54°4'3" = 0.94366 \text{ rad}$$

A kör területe figyelembe véve, hogy a gömb sugara R.

$$T_{kr} = (1 - \cos r)2\pi R^2 = 3.24501$$

3.feladat Az előző feladat jelöléseit, és eredményeit megtartva:

$$a = 126°52'12" = 2.2143 \text{ rad}$$
$$b = 101°5'32" = 1.77215 \text{ rad}$$
$$\alpha = 131°48'37" = 2.3005 \text{ rad}$$
$$\beta = 114°5'41" = 1.9913 \text{ rad}$$

Legyen P pont az ABC gömbháromszög beírt gömbi körének középpontja, sugara ρ.
Jelölje továbbá $\phi = APC\sphericalangle = BPC\sphericalangle$ szöget. *(Szimmetria miatt egyenlőek.)*
Írjunk fel koszinusztételt ACP és ABP háromszögekre.

$$\cos(a) = \cos^2(\rho) + \sin^2(\rho)\cos(2\pi - 2\phi)$$
$$\cos(b) = \cos^2(\rho) + \sin^2(\rho)\cos(\phi)$$

Mivel a, b értékei ismertek, így a két egyenletes egyenletrendszer megoldható:

$$\phi = 109°28'16"$$

$$\rho_1 = 71°33'54" \text{ és } \rho_2 = 108°26'6"$$

A két megoldás azt a két pontot adja a gömb felszínén, melyek azonos távolságra vannak A, B, C pontoktól. Ezen két átellenes pont közül a közelebbi esik az ABC háromszög belsejébe, így ez lesz a beírt kör középpontja.

$$\text{Tehát a beírt kör sugara: } \rho = 71°33'54"$$

Keletkező új pontok száma 4, és ezek a pontok az eredeti 4 háromszög körülírt köreinek középpontjai.

Tekintsük először azt a természetes háromszögelést, melyet úgy kapunk, ha az eredeti vetítés során keletkezett éleket megtartjuk, majd minden új pontot összekötünk az őt tartalmazó háromszög csúcsaival:
Ekkor kettő típusú háromszög keletkezik:
(a, b, c)*-típus jelentse azt, hogy a háromszög oldalhosszai* a, b, c

$$(a, \rho, \rho)\text{-típus: ebből 4 darab, ennek beírt kör sugara: } r_1 = 21°48'5"$$

$$(b, \rho, \rho)\text{-típus: ebből 8 darab, ennek beírt kör sugara: } r_2 = 26°35'20"$$

Ezt úgy tudjuk megpróbálni finomítani, hogy egy élet törlünk, majd a keletkező gömbi négyszög másik átlóját húzzuk be a törölt él helyett.

- Könnyen látható, hogy ρ hosszú élet nem lehet törölni, hiszen azzal nem konvex gömbi négyszög keletkezne.
- a hosszú él törlésével a keletkező új él hossza $90°$. Így két (a, ρ, ρ)-típust cserélünk két $(90°, \rho, \rho)$-típusra.
  Ennek a típusnak a beírt kör sugara: $r_3 = 26°33'54" > r_1$.
  Tehát ezeket a cseréket érdemes megtenni.
- b hosszú él törlésével a keletkező új él hossza $120°$. Így két (b, ρ, ρ)-típust cserélünk két $(120°, \rho, \rho)$-típusra.
  Ennek a típusnak a beírt kör sugara: $r_4 = 21°23'24" < r_2$.
  Tehát ezeket a cseréket nem érdemes megtenni.

Ezzel megkaptuk, hogy az a háromszögkövezés, ahol a beírt körsugarak minimuma maximális:

8 darab: (b, ρ, ρ)-típusú, és 4 darab: $(90°, \rho, \rho)$-típusú

Ekkor ez a maximum: $r_3 = 26°33'54"$

Megjegyzés: Beírt kör sugarakat ugyanúgy lehet számolni, mint 2.feladat megoldásában látható. Ebben a feladatban csak eredményeket közlöm.

4.feladat Jelölje F a BC oldal felezőpontját, és α_{OFA} az O, F, A pontok által kifeszített síkot. Ekkor $AF = s_a \in \alpha_{OFA}$

$$F \text{ helyvektora: } \overrightarrow{OF} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}$$

Tehát $\overrightarrow{OF} \parallel \mathbf{b}+\mathbf{c}$, így α_{OFA} normálvektora: $(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}$

Hasonlóan bizonyítható, a többi súlyvonal esetén is.

Ezek alapján a következő vektoregyenlet bizonyítja a súlypont létezését gömbháromszögek esetén.

$$((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times ((\mathbf{a}+\mathbf{c}) \times \mathbf{b}) = ((\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \times ((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a})$$

A bal oldal jelentése $s_a \cap s_b$ helyvektorának iránya, a jobb oldalé pedig $s_c \cap s_a$ helyvektorának iránya.

Bizonyítás: Az egyenlet két oldalát vonjuk ki egymásból:

$$((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times ((\mathbf{a}+\mathbf{c}) \times \mathbf{b}) - ((\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \times ((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) =$$

$$((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times ((\mathbf{a}+\mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}) =$$

$$((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) =$$

$$((\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

5.feladat Jelölje a szabályos ötszög szögeit α.
Területe:

$$T_5 = 5\alpha - 3\pi = 1$$

$$\alpha = \frac{1+3\pi}{5} = 2.08496 = 119°27'33"$$

Tekintsük azt a háromszögek, melynek két csúcsa az ötszög két szomszédos csúcsa, harmadik pedig a szabályos gömbi ötszög középpontja.
Ebben a háromszögben minden szöget ismerünk szimmetria miatt: $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, 72°$
Innen az ötszög oldalhossza:

$$\cos(a) = \frac{\cos 72° + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 0.72664$$

$$a = 43°23'40" = 0.75738$$

A gömbi kör területképlete: $T_k = (1 - \cos r)2\pi$, és tudjuk, hogy $T_k = \frac{1}{3}$.

$$\cos r = 1 - \frac{1}{6\pi} = 0.94695$$

$$r = 18°44'48" = 0.327183$$

Mivel $r < \frac{a}{2}$, ezért a körök nem metszenek egymásba. Tehát a keresett terület:

$$T = 1 - 5\left(T_k \frac{\alpha}{2\pi}\right) = 0.446948$$