14. hét

Vektorok, analitikus geometria

1) Határozzuk meg a $\underline{v}$ vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos felbontását! (Azaz írjuk fel ezek lineáris kombinációjaként!)
   a) $\underline{v} = (9;-9;10)$ és $\underline{a} = (2;-1;1)$, $\underline{b} = (-1;3;0)$, $\underline{c} = (1;0;7)$
   b) $\underline{v} = (3;6;4)$ és $\underline{a} = (2;1;1)$, $\underline{b} = (1;-1;1)$, $\underline{c} = (1;2;2)$

2) Adjuk meg a z paraméter értékét úgy, hogy a három vektor lineárisan függő vektorrendszert alkosson! (A definíció segítségével is, és a vegyesszorzat segítségével is oldjuk meg a feladatot!) $\underline{a} = (4;-1;2)$, $\underline{b} = (1;2;3)$, $\underline{c} = (3;3;z)$

3) Bázist alkotnak-e a következő vektorok $\mathbb{R}^3$-ben? $\underline{a} = (-4;2;1)$, $\underline{b} = (0;4;3)$, $\underline{c} = (-8;0;1)$

4) Írjuk fel egy tetszőleges $\overline{AB}$ szakaszt $\lambda : \mu$ arányban osztó pont helyvektorát!

5) Adjuk meg a z paramétert, és a D csúcspont koordinátáit úgy, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap legyen! $A = (2;6;0)$, $B = (1;2;3)$, $C = (-2;8;z)$

6) Legyen $\underline{a} = (1;5;4)$, $\underline{b} = (-1;3;1)$, $\underline{c} = (x;y;16)$! Adjuk meg x és y értékét úgy, hogy $\underline{a} \perp \underline{c}$ és $\underline{b} \perp \underline{c}$ is teljesüljön!

7) Az ABC háromszög csúcspontjai $A = (1;-1;2)$, $B = (5;-6;2)$, $C = (1;3;-1)$. Számítsuk ki a háromszög területét, és az AC oldalhoz tartozó magasságát is!

8) $A = (2;3;1)$, $B = (4;1;-2)$, $C = (6;3;7)$, és $C = (-5;-4;8)$ egy tetraéder csúcspontjai. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, és az ABC laphoz tartozó magasságát! Határozzuk meg továbbá a D-n átmenő magasságvonal egyenesét, és a magasság talppontját!

9) Írjuk fel az alábbi adatok által meghatározott egyeneseket paraméteres egyenletrendszer alakban, és nem-paraméteres egyenletrendszer alakban is!

   a) $P_0 = (-3;5;1)$ az egyenes egy pontja és $\underline{v} = (-1;-2;7)$ az irányvektora

   b) $P_1 = (-3;5;1)$ és $P_2 = (7;6;5)$ két pontja

   c) az egyenes párhuzamos a $\underline{w} = (1;-1;0)$ vektorral, és átmegy a $P_0 = (-4;2;1)$ ponton

   d) az egyenes párhuzamos a $\frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ egyenessel, és átmegy a $P_0 = (0;2;1)$ ponton

   e) az egyenes merőleges az $\underline{u} = (-1;2;1)$ és $\underline{v} = (3;0;1)$ vektorra is és egy pontja $P_0 = (-3;-7;1)$

10) Milyen t paraméterérték esetén lesz az alábbi két egyenes merőleges? (És párhuzamos?)

$$e: \frac{x+1}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-4}{4} \quad \text{és} \quad f: \frac{x-3}{t} = \frac{y}{4} = \frac{z-7}{2}$$

11) Milyen t paraméterérték esetén metszi egymást a két egyenes? (Adjuk meg a metszéspont koordinátáit is!) Lehetnek-e párhuzamosak? Mikor kitérőek?

$$e: x-1 = \frac{y+1}{2} = -\frac{z+1}{t} \quad \text{és} \quad f: x+2 = y-1 = z$$

12) Legyen $A=(2;-1;4)$, $B=(-2;3;-2)$, $C=(3;-1;0)$ és $D=(1;1;5)$!

a) Egy síkban vannak-e ezek a pontok? Ha nem, mekkora a kifeszített parallelepipedon térfogata?

b) Írjuk fel az A és B ponton átmenő e egyenes egyenletét!

c) Írjuk fel az ABC háromszöglap síkjának egyenletét!

d) Milyen távol van a D pont az ABC síkjától?

e) Milyen távol van a D pont az e egyenestől?

13) Legyen $A=(2;0;1)$, $B=(2;2;1)$, $C=(3;1;1)$!

a) Írjuk fel az ABC háromszög síkjának egyenletét!

b) Milyen távol van az origó ettől a síktól?

c) Határozzuk meg az $\overline{AB}$ oldalhoz tartozó magasság egyenletét, és a magasság talppontját!

d) Írjuk fel a C ponton áthaladó súlyvonal egyenletét!

e) Írjuk fel az $\overline{AB}$ oldallal párhuzamos középvonal egyenletét! Milyen távol van a C csúcs a középvonal egyenesétől?

14) Számítsuk ki az $S:\ 2x-3y+5z=12$ és a $Z:\ 4x-6y+10z+11=0$ párhuzamos sík távolságát!

15) Határozzuk meg az $S:\ x-2y+z+3=-12$ sík és az $e:\ \frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-6}$ egyenes metszéspontját!

16) Határozzuk meg az $S:\ 2x+y-5z+3=0$ és a $Z:\ x-y+2z=0$ sík metszésvonalát!

17) Lássuk be, hogy az alábbi egyenesek ugyanazzal az S síkkal párhuzamosak! Írjuk fel a sík egyenletét! (Vigyázat, nem egyetlen ilyen sík van!)

$e_1:\ \frac{x-3}{8}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{4}$, $\quad e_2:\ \frac{x}{5}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{7}$, $\quad e_3:\ \frac{x+8}{3}=\frac{y}{7}=\frac{z+9}{-3}$

18) Tükrözzük a $P=(3;2;1)$ pontot

a) az $A=(-1;0;9)$ pontra!

b) az $e:\ \frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-6}$ egyenesre!

c) az $S:\ x-2y+z+3=-12$ síkra!

Halmschlager Andrea