Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

1. feladatsor: Vektorfüggvények deriválása (megoldás)

---

1. Tekintsük azt az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, ami az $(1,0)$ vektort az $(1,0,-2)$ vektorba, a $(0,1)$ vektort pedig a $(-2,10,-1)$ vektorba viszi. Mi a mátrixa a standard bázisban? Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ és $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ vektorokat, $\mathbb{R}^3$-ben pedig az $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}),(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ és $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ vektorokat. Ellenőrizzük, hogy ezek ortonormált bázisok és írjuk fel L mátrixát ezekre nézve is.

   Megoldás. A standard bázisban a mátrix
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   A megadott vektorok $\sqrt{3^2+4^2}=5$ és $\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3^2$ miatt egységnyi hosszúak. $3\cdot 4+4\cdot(-3)=0$ és $(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2=(-1)\cdot 2+2\cdot 2+(-2)\cdot 1=(-2)\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1=0$ alapján páronként ortogonálisak, így lineárisan függetlenek. Számuk a dimenzióval egyezik meg, így tehát bázist is alkotnak. A leképezés mátrixa az új bázisban
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Tegyük fel, hogy egy M mátrix antiszimmetrikus része
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Határozzuk meg OMO^{-1} antiszimmetrikus részét, ha
   a) O az $x-y$ síkra való tükrözés mátrixa;
   b) O az x tengely körüli α szögű forgatás mátrixa.
   Hogyan változik az antiszimmetrikus részből képzett vektor a két esetben?

   Megoldás. O mindkét esetben ortogonális, tehát $OMO^{-1}=OMO^T$ antiszimmetrikus része OAO^T. Az első esetben az új antiszimmetrikus rész
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
   a másodikban pedig
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 3\cos\alpha+2\sin\alpha & -2\cos\alpha+3\sin\alpha \\ -3\cos\alpha-2\sin\alpha & 0 & -1 \\ 2\cos\alpha-3\sin\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Az első esetben a vektor a z tengelyre tükröződik, a másodikban pedig az x tengely körül α szöggel elfordul.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. Határozzuk meg a $\operatorname{grad} f$ vektormezőt és a $\triangle f$ skalármezőt.

   Megoldás.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (x,y,z).$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 3.$$

4. Legyen $f_1(x,y) = e^x \cos y$ és $f_2(x,y) = e^x \sin y$. Számoljuk ki a $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2$ vektormezőket és a $\triangle f_1, \triangle f_2$ skalármezőket.

   Megoldás.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f_1(x,y) &= (e^x \cos y, -e^x \sin y) \\ \operatorname{grad} f_2(x,y) &= (e^x \sin y, e^x \cos y) \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_1(x,y) &= e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_2(x,y) &= e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \end{aligned}$$

5. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2})(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ minden pontban párhuzamos a $\mathbf{k}$ vektorral és nagysága csak a z tengelytől mért távolságtól függ.

   Megoldás. Számoljuk ki a rotációt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yf(\sqrt{x^2+y^2}) & xf(\sqrt{x^2+y^2}) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(xf(\sqrt{x^2+y^2})\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z}\left(-yf(\sqrt{x^2+y^2})\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xf(\sqrt{x^2+y^2})\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-yf(\sqrt{x^2+y^2})\right)\right)\mathbf{k} \\ &= \left(2f(\sqrt{x^2+y^2}) + xf'(\sqrt{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + yf'(\sqrt{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})\right)\mathbf{k} \\ &= \left(2f(\sqrt{x^2+y^2}) + \sqrt{x^2+y^2}f'(\sqrt{x^2+y^2})\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

6. Egy $\mathbf{v}$ vektormező rotációja $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (y^3 - 2xyz)\mathbf{i} + (-2xz^2)\mathbf{j} + (2x^3+yz^2)\mathbf{k}$. Írjuk fel $O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1}$ rotációját, ha O az $x = y$ síkra való tükrözés.

   Megoldás. O tükrözés, tehát a tanultak szerint az új vektormező $O\mathbf{r}$ pontbeli rotációja ugyanaz, mintha az eredeti $\mathbf{r}$ pontbeli rotációra a $-O$ forgatást alkalmaznánk. Tehát fel kell cserélni az első két komponenst, ellentettjére változtatni a vektort és x-et y-nal fel kell cserélni: $\operatorname{rot}(O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1})(x,y,z) = 2yz^2\mathbf{i} + (-x^3+2xyz)\mathbf{j} + (-2y^3 - xz^2)\mathbf{k}$.

7. Bizonyítsuk be az alábbi Leibniz-szabályokat:
   a) $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)g + f\operatorname{grad} g$
   b) $\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2(\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} g) + f(\triangle g)$

   Megoldás. A gradiens i. komponense:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x_1,\dots,x_n)g(x_1,\dots,x_n)) \\ &\qquad = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\dots,x_n)\right)g(x_1,\dots,x_n) + f(x_1,\dots,x_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g(x_1,\dots,x_n)\right), \end{aligned}$$

ez valóban $(\operatorname{grad} f)g + f \operatorname{grad} g$ i. komponensével egyenlő.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(fg) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \right) g + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g \right)$$

További gyakorló feladatok

8. Számoljuk ki a sík α szögű forgatásának $R(\alpha)$ mátrixát és ellenőrizzük ennek segítségével a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteket. Legyen A egy lineáris leképezés (2×2-es) mátrixa a standard bázisban. Hogyan változik az antiszimmetrikus rész mátrixa, ha az α szöggel pozitív irányban elforgatott bázisban írjuk fel? És ha a két bázisvektort felcseréljük?

   Megoldás. $(1, 0)$ képe $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(0, 1)$ képe $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$, tehát

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

   $R(\alpha + \beta) = R(\alpha)R(\beta)$ miatt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

   ami az addíciós képletekkel ekvivalens.

   Ha O ortogonális mátrix, akkor az O oszlopaiból képzett bázisban ugyanennek a leképezésnek a mátrixa $O^{-1}AO = O^TAO$. Ha A antiszimmetrikus része A_{as}, akkor O^TAO antiszimmetrikus része $O^TA_{as}O$. A 2×2 antiszimmetrikus mátrixok egydimenziós vektorteret alkotnak, $X \mapsto O^TXO$ lineáris leképezés, tehát elég egy nemnulla elem képét megnézni. Az elforgatott bázisnál $O = R(\alpha)$, tehát

$$R(\alpha)^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   vagyis az antiszimmetrikus rész nem változik. Ha a két bázisvektort felcseréljük, akkor hasonlóan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

   tehát az antiszimmetrikus rész az ellentettjére változik.

9. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitikus függvény, és definiáljuk az f_1, f_2 síkbeli skalármezőket a következő módon: $f_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ és $f_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{grad} f_2$ minden pontban $\operatorname{grad} f_1$ elforgatottja $\pi/2$ szöggel, és $\triangle f_1 = \triangle f_2 = 0$.

   Megoldás. Először komplex együtthatós polinomokra látjuk be az állítást. Mivel a szereplő differenciáloperátorok és az elforgatás lineáris leképezések, elegendő a polinomok vektorterének egy $\mathbb{R}$ feletti bázisára belátni az állítást. Válasszuk ennek az $f(z) = az^n$ polinomokat, ahol $n \in \mathbb{N}$, $a \in \{1, i\}$. Ha $n = 0$, akkor mindkét függvény konstans, tehát már a gradiensek is nullvektorok, ha viszont $n \geq 1$, akkor az első esetben

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f_1(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} a(x + iy)^n, \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} a(x + iy)^n, \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(an(x + iy)^{n-1}, ian(x + iy)^{n-1} \right) \\ &= \left(n \operatorname{Re} a(x + iy)^{n-1}, -n \operatorname{Im} a(x + iy)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f_2(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} a(x+iy)^n, \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} a(x+iy)^n,\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(an(x+iy)^{n-1}, ian(x+iy)^{n-1}\right)\\ &= \left(n\operatorname{Im} a(x+iy)^{n-1}, n\operatorname{Re} a(x+iy)^{n-1}\right),\end{aligned}$$

ezek valóban merőlegesek egymásra. Másrészt

$$\begin{aligned}\triangle f_1(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\operatorname{Re} a(x+iy)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\operatorname{Re} a(x+iy)^n\\ &= \operatorname{Re}\left(an(n-1)(x+iy)^{n-2} + i^2 an(n-1)(x+iy)^{n-2}\right) = 0\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\triangle f_2(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\operatorname{Im} a(x+iy)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\operatorname{Im} a(x+iy)^n\\ &= \operatorname{Im}\left(an(n-1)(x+iy)^{n-2} + i^2 an(n-1)(x+iy)^{n-2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Legyen z_0 tetszőleges pont és írjuk fel f Taylor-sorát z_0 körül. Ha ennek konvergenciasugara R, akkor minden $r < R$ sugarú z_0 körüli körlapon a Taylor-sor tagonkénti k. deriváltja egyenletesen konvergál f k. deriváltjához. A sor részletösszegei polinomok, és a konvergencia öröklődik f_1, f_2 parciális deriváltjaira is, tehát a fenti tulajdonságok f-re is igazak.

10. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$.

Megoldás. Vezessük be az $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ jelölést és számoljuk ki a rotációt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}zf(r) - \frac{\partial}{\partial z}yf(r)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}xf(r) - \frac{\partial}{\partial x}zf(r)\right)\mathbf{j}\\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}yf(r) - \frac{\partial}{\partial y}xf(r)\right)\mathbf{k}\\ &= f'(r)\left[\left(z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{\partial r}{\partial z} - z\frac{\partial r}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{\partial r}{\partial x} - x\frac{\partial r}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] = 0,\end{aligned}$$

mivel $\operatorname{grad} r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

11. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$):
   a) $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f)\cdot\mathbf{u} + f\operatorname{div}(\mathbf{u})$
   b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f)\times\mathbf{u} + f\operatorname{rot}(\mathbf{u})$
   c) $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{v})$

Megoldás. Legyen $\mathbf{u}(x_1,\dots,x_n) = u_1(x_1,\dots,x_n)\mathbf{e}_1 + \dots + u_n(x_1,\dots,x_n)\mathbf{e}_n$, stb.

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}u_i + f\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{u})(x,y,z)_x = \frac{\partial}{\partial y}fu_z - \frac{\partial}{\partial z}fu_y = \frac{\partial f}{\partial y}u_z - \frac{\partial f}{\partial z}u_y + f\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right),$$

ami éppen $\operatorname{grad}(f) \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot}(\mathbf{u})$ első komponense, stb.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial(u_y v_z - u_z v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_z v_x - u_x v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x v_y - u_y v_x)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial u_y}{\partial x} v_z - \frac{\partial u_z}{\partial x} v_y + \frac{\partial u_z}{\partial y} v_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} v_z + \frac{\partial u_x}{\partial z} v_y - \frac{\partial u_y}{\partial z} v_x \\
&+ u_y \frac{\partial v_z}{\partial x} - u_z \frac{\partial v_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial v_x}{\partial y} - u_x \frac{\partial v_z}{\partial y} + u_x \frac{\partial v_y}{\partial z} - u_y \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
&= \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$