Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
6. hét

1. Ábrázolja az adott függvényeket, és állapítsd meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek! (Páros? Páratlan? Periodikus? Értékkészlet? Értelmezési tartomány?) Amelyik invertálható, számolja ki az inverzét is!

   a) $-3x+4$ b) $-x^2+3x+1$ c) $\dfrac{1}{x+2}$ d) e^{-x}
   e) $\sin 2x$ f) $\ln x+1$ g)[hf] $\operatorname{tg}(-x)$ h)[hf] $\log_{1/3}(2x-1)$
   i)[hf] $\dfrac{2}{x^2}$

2. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^9+4x^6+1)$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$
   d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$ e)[hf] $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ f)[hf] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2}$
   g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ i)[hf] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
   j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ l)[hf] $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$

3. Ábrázoljuk a függvényeket, majd határozzuk meg a határértékeket.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$ c) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$

4.[hf] Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely

   a) minden pontban folytonos b) semelyik pontban sem folytonos
   c) pontosan egy pontban nem folytonos d) pontosan egy pontban folytonos

Emlékeztető

– Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek *a határérétéke x_0-ban a*, (jelölésben $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$), ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta$, hogy $|x-x_0|<\delta$, és $x\neq x_0$ esetén $|f(x)-a|<\varepsilon$.
  A függvény féloldali határértékeinek értelmezése:
  Baloldali: $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x_0-x)<\delta$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.
  Jobboldali: $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x-x_0)<\delta$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.

– $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, ha $\forall K$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x_0-x)<\delta$ esetén $f(x)>K$.

– $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists H$, hogy $x>H$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.

– *f folytonos az x_0 pontban*, ha $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. *$f$ folytonos*, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.