Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
9. hét

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

3.[hf] Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

4. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!

5.[hf] Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?

6.[hf] Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64+l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

7.[hf] Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

8. Kiszámolandó határértékek:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^{-5x}$

d)[hf] $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

e)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x}$

f)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$

g)[hf] $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x\cos x}{(2\pi - x)^2}$

h)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin x}\right)$

i)[hf] $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x^7$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$

l)[hf] $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

m)[hf] $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Emlékeztető

– A Bernoulli-L'Hospital szabály szerint, ha f és g deriválhatóak x_0 egy környezetében, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ egy „$\frac{0}{0}$" vagy „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú" határérték, valamint $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.