MINTA

2. Zárthelyi megoldásokkal 2011 tavasz A2

1. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$ minden sajátértéke pozitív!

MO. $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sajártékeinek meghatározása:

$\left|\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2) - 15 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \rightsquigarrow \quad \lambda_{1,2} = -1, 7$ a sajátértékek. **5p**

Ebből $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$ sajátékei: $\lambda_{1,2} = (-1)^n, 7^n$ **4p**

azaz pontosan a páros n-ekre áll fenn, hogy mindkét sajártték pozitív. **1p**

10p

2. Hol folytonosak az alábbi függvények ha $f(0,0)=g(0,0)=0$ és az origón kívül

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ **(b)** $g(x,y)=\dfrac{x^2+x^2y^2}{x^2+y^4}$

MO. Mindkét esetben mindenütt, mert az origó kivételével koordináta–függvényekből (melyek folytonosak) folytonosságot megőrző módon vannak összerakva. **2p**

Az origóban pedig

(a) f folytonos: $0 \le f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \dfrac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$ **5p**

(b) g nem folytonos: $g(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ és $g(0,y) = \dfrac{0}{y^4} = 0$ **3p**

10p

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^3+y^3}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ és $g(x,y) = (x+y)e^{x+y}$ az egész síkon. Határozza meg az f és g függvények $e = (1,0)$ irányú iránymenti deriváltját az origóban és a $P = (1,1)$ pontban, amennyiben ezek léteznek!

MO. Az adott iránymenti derivált az x szerinti parciális derivált. **2p**

Mind a négy parciális létezik:

$f(x,0) = x \rightsquigarrow f_x(0,0) = 1$ **3p**

$f_x(x,y) = \dfrac{x^3(x^3+4y^3)}{(x^3+y^3)^2} \rightsquigarrow f_x(1,1) = \frac{5}{4}$. **3p**

$g_x(x,y) = e^{x+y} + (x+y)e^{x+y} \rightsquigarrow g_x(0,0) = e^0 = 1$ **1p**

$g_x(1,1) = e^2 + 2e^2 = 3e^2$ **1p**

10p

4. Legyen H_1 és H_2 két háromszög a síkban, H_1 csúcsai a $(0,0), (0,1), (-1,0)$ pontok, míg H_2 csúcsai az $(0,1), (1,2), (0,3)$ pontok. Számítsa ki az $f(x,y) = 4xy$ területi integrálját a $T = H_1 \cup H_2$ tartományon.

MO. $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x+1,\ -1 \le x \le 0\}$, $H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+1 \le y \le -x+3,\ 0 \le x \le 1\}$ **3p**

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} 4xy\,dydx + \int_{0}^{1}\int_{x+1}^{-x+3} 4xy\,dydx = \qquad \textbf{4p}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} \qquad \textbf{3p}$$

10p

Folytatás a következő oldalon.

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{5n}\right)^{n^2}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n}$

MO.

(a) Konvergens. Pl. Gyökkritériummal: $\frac{1+2n}{5n} \longrightarrow \frac{2}{5} < 1$ **2p**

(b) Konvergens. Pl. Gyökkritériummal: $\frac{1+2n}{5n} \longrightarrow \frac{2}{5} \rightsquigarrow 0 < \left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ **3p**

(ahol persze az utolsó becslés elegendően nagy n-ekre vonatkozik.)

(c) Divergens. $\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n} \sim \frac{1}{n}$ mert $(1+\frac{2}{n})^n \longrightarrow e^2$ **3p**

(d) Divergens. $\frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n} > \frac{5^n}{n} \longrightarrow \infty$ **2p**

10p

6.

(a) Melyik állítás igaz és melyik nem?

(a1) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dydx = 0$

(a2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dydx = 0$

(a3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx = -1$

(a4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dydx = 0$

(b) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(b1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is

(b2) Ha tagjai monoton nőnek, akkor konvergens

(b3) Ha konvergens, akkor a tagjai 0-hoz tartanak.

(b3) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.

MO.

(a)

(a1) Igaz: az integrandus páratlan az y tengelyre nézve szimmetrikus tartományon. **2p**

(a2) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével az egész tartományon pozitív. **1p**

(a3) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével az egész tartományon pozitív. **1p**

(a4) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével az egész tartományon pozitív. **1p**

(b)

(b1) Igaz: $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$ és Cauchy-kritérium **2p**

(b2) Nem igaz: $\sum n$ nyilván divergens **1p**

(b3) Igaz: Cauchy-kritérium $m = n+1$-re **1p**

(b4) Nem igaz: $\sum 1/n$ divergens pl. integrálkritériummal **1p**

10p