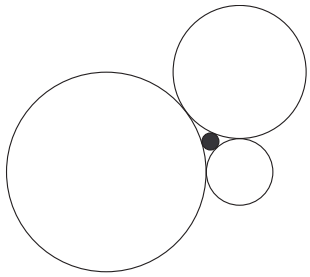
BME MATEMATIKA VERSENY
2009. 04. 30.

Az első és második feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük, a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Minden feladat 10 pontos. Részmegoldásokat, általánosításokat illetve lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk *külön lapra* írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan név, Neptun-kód és a feladat sorszáma, az első lapon pedig ezek mellett kar, szak, évfolyam is.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c egészek, akkor $abc(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$ osztható 720-szal.

2. Adott 3 kör a síkban, melyek sugara rendre 1, 2, 3, és páronként kívülről érintik egymást. Beírunk egy kört az általuk határolt tartományba, amely érinti mindhármat (az ábrán a feketére színezett kör). Határozzuk meg a sugarát.



3. Legyen V egy n dimenziós vektortér és B és C két bázis V-ben. Bizonyítsuk be, hogy B vektorai megszámozhatóak b_1-től b_n-ig és C vektorai megszámozhatóak c_1-től c_n-ig úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén $(B \setminus \{b_i\}) \cup \{c_i\}$ szintén bázis legyen V-ben.

4. Legyen P azon valós polinomok halmaza, melyek minden egész helyen egész értéket vesznek fel. Adjuk meg a $\langle P, +\rangle$ csoport egy minimális generátorrendszerét. (Azaz egy olyan $A \subseteq P$ halmazt, hogy P minden eleme előáll véges sok A-beli elem előjeles összegeként, de ha A bármelyik elemét elhagyjuk, akkor ez már nem teljesül.)

5. $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ teljesen független véletlen bitek, azaz X_i értéke 0 vagy 1 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ eséllyel. Adjunk meg minél több $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bitet $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ függvényeként, de egyéb véletlen felhasználása nélkül úgy, hogy $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *páronként* függetlenek legyenek.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x, y < 1$, akkor
$$x^y + y^x < 1 + xy + (1 - x)(1 - y).$$

7. Mutassuk meg, hogy $(x + y)^n$ binomiális kifejtésében a páratlan együtthatójú tagok száma kettőhatvány.

8. Adjuk meg az összes pozitív a, b, c, d valós számnégyest, melyre az $f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$ függvény szigorúan monoton növő $x > 0$ esetén.

9. Legyen $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ és
$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + z_n}{2}, \qquad z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$
Bizonyítsuk be, hogy az x_n sorozat, az y_n sorozat és a z_n sorozat is konvergens. Mik a határértékeik?

10. Egy urnában van n darab golyó, egy piros és $n-1$ kék. Egy lépésben kihúzunk egy golyót találomra, majd visszatesszük azt és még egy ugyanolyan színűt. Mennyi a kihúzott piros golyók számának várható értéke n^2 lépés után?