**BME Matematika Verseny** **2011. április 14.** $16^{00}$–$20^{00}$, **E.I.A**

— Eredményhirdetés április 28-án, csütörtökön $16^{00}$ órakor, a Q épület D szárny földszint F13-as teremben.
— Az első feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük; a maradék kilenc feladatra bárki adhat be megoldást. Érdemi részmegoldásokat, érdemi általánosításokat és lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk.
— Minden feladat 10 pontot ér.
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör.
— **Csak könnyen olvasható és világos okfejtést értékelünk.**

**1.** Adott $a$, $b$, $c$, $d$ oldalhosszúságú síkbeli négyszögek között melyik lesz maximális területű? Az oldalak ebben a sorrendben csatlakoznak.

**2.** Melyek azok a tízes számrendszerben felírt természetes számok, melyek utolsó számjegyét az elejére áthelyezve az eredeti szám 2/3-át kapjuk?

**3.** Legyen $A$ invertálható $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel, hogy az $A$ és $A^{-1}$ mátrixok minden eleme nemnegatív. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $k > 0$ egész, hogy $A^k$ diagonális mátrix.

**4.**
$$\int_0^\infty e^{-(y^2+y^{-2})}dy = ?$$

**5.** a. Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egységvektorok egy euklideszi térben, $| < v_i, v_j > | < 1/(n-1)$, ha $i \neq j$. Mutassuk meg, hogy $v_1, \ldots, v_n$ lineárisan függetlenek.
b. Legyen $m = (n-1)n/2 + 1$, $v_1, \ldots, v_m$ egységvektorok, $| < v_i, v_j > |^2 < 1/(m-1)$, ha $i \neq j$. Mutassuk meg, hogy $v_1, \ldots, v_m$ közül kiválasztható $n$ lineárisan független vektor.

**6.** Az irányított $G$ egyszerű gráf irányított kromatikus száma, $\chi_i(G)$ az a legkisebb $k$, amelyre $k$ színnel színezhetők a csúcsok úgy, hogy egy él két vége különböző színű és bármely adott színpárban csak az egyik irányba vezethet él. Mutassuk meg, hogy nincs olyan $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ függvény, melyre $\chi_i(G) \leq f(\chi(G))$ teljesül minden $G$-re, ahol $\chi(G)$ a megfelelő irányítatlan gráf kromatikus száma. Azaz az irányított kromatikus szám nem becsülhető a kromatikus szám ismeretében.

**7.** Mutassuk meg, hogy ha $f \in C(0, \infty)$ és minden $x > 0$-ra $\lim_{n\to\infty} f(x/n) = 0$, akkor $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

**8.** Legyen $1 \leq k \leq n$. Mutassuk meg, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számok egy véletlen permutációjánál
a. $1/k$ valószínűséggel lesznek az $1, 2, \ldots, k$ számok ugyanabban a ciklusban,
b. $1/k!$ valószínűséggel lesznek az $1, 2, \ldots, k$ számok csupa különböző ciklusban.

**9.** Legyenek $P$, $Q$ ortogonális projekciók egy véges dimenziós térben. Mutassuk meg, hogy
$$\mathbf{Tr} e^{P+Q} \leq \mathbf{Tr}(e^P e^Q).$$

**10.** Legyen $f(z)$ reguláris a $\mathrm{Re} z > 0$ félsíkon. Tegyük fel, hogy
$$\lim_{z\to 0,\ \mathrm{Re} z>0} \frac{f(z) - a_0}{z} = a_1.$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén
$$\lim_{z\to 0,\ \mathrm{Re} z>\delta|\mathrm{Im} z|} f'(z) = a_1.$$