

— Eredményhirdetés május 3-án, csütörtökön 16⁰⁰ órakor, IB026. A feladatok javítása megtekinthető a H.24/a-ban május 2-től.

— Az első két feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük; a maradék kilenc feladatra bárki adhat be megoldást. Érdemi rész megoldásokat, érdemi általánosításokat és lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk.

— Minden feladat 10 pontot ér.

— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör.

— **Csak könnyen olvasható és világos okfejtést értékelünk.**

1. Legyenek a és b relatív prím természetes számok. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely nem áll elő $ak_1 + bk_2$ alakban, ahol k_1, k_2 nemnegatív egészek?

2. Legyen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvény, melyre $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f = A$ véges határérték. Mutassuk meg, hogy bármely $\delta > 0$ mellett az $\int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt$ improprius integrál konvergens és

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt = A.$$

3. Legyen $T_1(x)$ az e^x függvény a pontbeli érintőegyenese. Melyik a értékre lesz $\max_{[0,1]} |e^x - T_1(x)|$ a legkisebb?

4. Egy tetraéder AB és CD élei merőlegesek egymásra, mindegyik $2a$ hosszú. A felezőpontjaikat összekötő EF szakasz mindkét élre merőleges, az AC, AD, BC, BD éleknél lévő lapszögek 60° -osak. Meghatározandó a tetraéder beírt és körülírt gömbjének sugara.

5. Keressük meg az összes olyan $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvénpárt, melyre $f^2 + g^2 = 1$ és $f'^2 + g'^2 = 1$.

6. Adott egy n szögpontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy

a. Ha minden pont foka legalább 3, akkor van a gráfban páros hosszú kör.

b. Abból, hogy minden pont foka legalább $(n-1)/2$, nem következik, hogy van a gráfban páratlan kör. Adjunk ellenpéldát minden n -re.

c. Ha minden pont foka legalább $(n+1)/2$, akkor van a gráfban páratlan kör.

7. Az $x \geq 0$ félsíkban tekintsünk K_n köröket, melyek az origóban érintik az y tengelyt és K_n sugara kétszerese K_{n+1} sugarának, $n = 1, 2, \dots$. Adott jelre a K_{n+1} körök azonos konstans szögsebességgel gördülni kezdenek a K_n körvonalon, azt belülről érintve, negatív forgásirányban. A K_n kör középpontja által leírt görbe legyen Γ_n . Mi lesz Γ_n határgörbéje, ha $n \rightarrow \infty$? Adjuk meg a határgörbe paraméterezését.

8. A $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ összeg milyen n esetén egész szám?

9. Legyen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ akárhányszor differenciálható és tegyük fel, hogy az $S(x) = \sum_{n=0}^\infty f^{(n)}(x)$ függvény sor lokálisan egyenletesen konvergens. Adjuk meg az $S(x)$ összegfüggvényt zárt alakban.

10. Legyenek $f, g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$ lineáris leképezések. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\mathbf{R}^5 = W_1 \oplus W_2$ direkt összeg-felbontások, hogy $i = 1, 2$ -re $f(V_i) \subset W_i$, $g(V_i) \subset W_i$ és $V_i \oplus W_i \neq 0$.

11. Sorban állok a postán. n ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Egyetlen sor van, ahonnan az éppen felszabaduló ablakhoz megy, aki következik. Egy ügyfél kiszolgálási ideje bármelyik ablaknál független, $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlást követ. Mi a valószínűsége annak, hogy a k -ik utánam következő előbb végez, mint én? Mi a válasz akkor, ha az i -ik ablaknál a kiszolgálási idő eloszlása $\lambda_i > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás?