

Analízis 3. Házi feladatok - 2. rész (2010/2011 őszi)

1. Határozzuk meg $[0, 1]$ intervallum azon részhalmazának Lebesgue-mértékét, amely olyan számokból áll, melyek tizedestört alakjában a 2-es számjegy előbb áll, mint a 3-as, illetve mikor előbb áll a 2-es, mint az 5-ös!
2. Mutassuk meg, hogy \mathbb{R} minden nulla Lebesgue-mértékű zárt részhalmaza sehol sem sűrű, azaz lezártjának nincsen belső pontja.
3. Bizonyítsuk be, hogy azon $[0, 1]$ -beli valós számok, amelyeknek van olyan tizedestört alakja, amelyben nem szerepel a 7-es számjegy, sehol sem sűrű, perfekt, (azaz zárt és minden pontja torlódási pont), nulla Lebesgue-mértékű halmazt alkotnak.
4. Legyen A pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pontja, melyek különbsége racionális!