Analízis 3. Házi feladatok 4. rész (6. hét, 2010/11. ősz)

1. Tudjuk, hogy egy nemnegatív mérhető f függvény integrálja

$$\int_X f\,d\mu = \sup\{y_n\mu(y_n \le f) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\mu(y_i \le f < y_{i+1}) : 0 \le y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \infty\}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\int_X f\,d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A_i) : A_i \text{ mérhető, diszjunkt, } 0 \le c_i \le \inf_{A_i} f\}.$$

2. a. Adjunk meg olyan $f_n : X \to [0, \infty]$ mérhető függvényeket, melyekre a Fatou lemmában szigorú egyenlőtlenség áll.
b. Olyan példa is van, ahol f_n egyenletesen konvergens X-en?

3. Legyen $\mu(A)$ az A halmaz elemszáma.
a. Milyen $f : X \to \bar{\mathbf{R}}$ függvényeknek van integrálja?
b. Milyen f-ek integrálhatók?
c. Mi az integrál?

4. Mutassuk meg, hogy ha $f : X \to \bar{\mathbf{R}}$ integrálható és $\int_A f\,d\mu = 0$ minden mérhető A-ra, akkor $f = 0$ μ-m.m.