Analízis 3. 1. zárthelyi 2010. 10. 25.

1. [15p] Adjunk meg egy alaphalmazon két σ-algebrát, melyek uniója nem σ-algebra.

2. [15p] Legyen $\pi(x, y) = x$ a merőleges vetítés az x-tengelyre és $A \subset \mathbf{R^2}$ esetén legyen $\mu(A) = \lambda(\pi(A))$, ahol λ a külső Lebesgue-mérték a számegyenesen. Mutassuk meg, hogy
a. μ külső mérték $\mathbf{R^2}$-en.
b. Ha A_0 λ-mérhető, akkor $A_0 \times \mathbf{R}$ μ-mérhető.

3. [20p] Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer az X alaphalmazon, $\mathcal{A}$ a $\mathcal{H}$ által generált σ-algebra, μ és ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Mutassuk meg, hogy ha μ és ν megegyezik a $\mathcal{H}$ halmazain és $\mathcal{H}$ zárt a véges metszetre és tartalmazza X-et , akkor $\mu = \nu$.

4. [20p] Adjunk példát olyan $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue-mérhető halmazra, melynek van nem Lebesgue-mérhető $E|^y = \{x : (x, y) \in E\}$ vízszintes szelete. Van-e olyan példa is, ahol $E|^y$ nem mérhető egyetlen y-ra sem (de E mérhető)?

5. [15p] Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \subset \mathbf{R}$ (nem feltétlenül mérhető) halmazhoz van olyan $B \subset \mathbf{R}$ Borel-halmaz, hogy $A \subset B$ és a külső Lebesgue-mértékre $\lambda(A) = \lambda(B)$.

6. [15p] a. Definiáljuk a mértékben való konvergencia fogalmát.
b. Mutassuk meg, hogy ha $A_n \subset \mathbf{R}$ mérhető, akkor a karakterisztikus függvényekre

$$\chi_{A_n} \to 0 \text{ mértékben } \Leftrightarrow \mu(A_n) \to 0.$$

****

Max. 100 pont. Jegyhatárok: 40, 55, 65, 80 pont. Munkaidő 100 perc.