Feladatok mintazárthelyihez, Felsőbb mat. inf. B, 2012. december

Az alábbi feladatokból 7 alkothat egy zh-t, pl. 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14 vagy 2, 4, 6, 8, 10, 13, 16.

1. [15p] $\cos x$ gyökét keressük Newton-módszerrel. Írjuk fel az iteráció egy lépését (hogyan kapjuk x_{n+1}-et x_n-ből). Írjuk át a képletet az $\varepsilon_n = x_n - \pi/2$ hibára. Mit tapasztalunk a hibacsökkenés sebességére nézve?

2. [10p] A $\sin x = 1 - x$ egyenlet megoldására a felezéses módszert vagy a fixpont-iterációt érdemes választani? Miért?

3. [15p] Határozzuk meg a következő függvény feltételes szélsőérték-helyét a megadott feltétel mellett: $f = xyz$, ha $x + y + z = 1$. A kapott pontban globális szélsőérték is van?

4. [15p] Írjuk fel az első és második variációját az alábbi $J(y)$ funkcionálnak:

$$\int_a^b \sqrt{y + y'^2}\, dx,$$

5. [15p] Írjuk fel a következő funkcionálhoz tartozó Euler-Lagrange egyenletet és keressük meg az extremális y függvényt:

$$\int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}\, dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1/e.$$

6. [15p] Keressük meg azt a $J(y)$ funkcionált, melynek az Euler-Lagrange egyenlete éppen az $1 = y' + y$" differenciálegyenlet.

7. [15p] A Pontrjagin-féle maximumelv segítségével oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot (adjuk meg az optimális irányítást és az optimális trajektóriát):

$$\ddot{x} = u,\ |u| \le 1,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(T) = 0,\ T \to \min.$$

8. [15p] Írjuk fel az alábbi feladathoz tartozó Hamilton-Jacobi-Bellmann egyenletet:

$$\dot{x_1} = x_2,\ \dot{x_2} = u,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) - x_1(1) + \int_0^1 u^2\, dt \to \min.$$

9. [10p] Milyen c értékre lesz elliptikus, parabolikus ill. hiperbolikus az $Lu = u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy}$ operátor?

10. [15p] Adja meg az $yu_x + xu_y = 1$ egyenlet összes megoldását.

11. [15p] Adja meg az $xu_x + yu_y = u^2$ egyenlet összes megoldását.

12. [15p] Adja meg az $yu_x - xu_y = x$ egyenletnek az $(1, s, s^2)$ paraméterezésű görbén átmenő megoldását.

13. [10p] Legyen $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Keresse meg azt az $u(x, y)$ függvényt, melyre $\Delta u = x - y$ az Ω-n és $u = x^2$ az Ω határán.

14. [15p] Legyen $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Keresse meg azt az $u(x, y)$ függvényt, melyre $\Delta u = 1$ az Ω-n és $u = x$ az Ω határán.

15. [15p] Fourier-módszerrel keresse meg a következő feladat sajátértékeit és sajátfüggvényeit:

$$-\Delta u = \lambda u \ \ (0, \pi) \times (0, \pi)\text{-n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ a határon}$$

ahol $\partial u / \partial n$ jelöli a külső normális irányú deriváltat.

16. [15p] Fourier-módszerrel keresse meg a következő feladat megoldását: $\mathrm{u}_{tt} = u_{xx} + 1 \quad t \in [0, T],\ x \in [0, \pi]$
$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ a határon ahol $\partial u / \partial n$ jelöli a külső normális irányú deriváltat.

****

Maximum 100 pont. Jegyhatárok: 40, 55, 65, 80 pont. Munkaidő 100 perc.