Variációszámítási feladatok

1. Írjuk fel az első és második variációját az alábbi $J(y)$ funkcionáloknak:

$$\text{a.}\quad \int_a^b (x+y)\,dx,$$

$$\text{b.}\quad \int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx,$$

$$\text{c.}\quad \int_0^\pi y' \sin y\,dx,$$

$$\text{d.}\quad \int_0^1 (xy^2 + y'^3)\,dx,$$

$$\text{e.}\quad \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$\text{f.}\quad \int_{-1}^1 (y'e^y + xy^2)\,dx.$$

2. Írjuk fel a következő funkcionálokhoz tartozó Euler-Lagrange egyenletet és keressük meg az extremális y függvényeket:

$$\text{a.}\quad \int_{-1}^0 (12xy - y'^2)\,dx, \quad y(-1)=1,\ y(0)=0.$$

$$\text{b.}\quad \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)\,dx, \quad y(1)=1,\ y(2)=0.$$

$$\text{c.}\quad \int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)}\,dx, \quad y(0)=y(1)=1/\sqrt{2}.$$

$$\text{d.}\quad \int_0^1 yy'^2\,dx, \quad y(0)=1,\ y(1)=4^{1/3}.$$

e. $\int\limits_0^\pi (4y\cos x + y'^2 - y^2)\,dx, \quad y(0)=0,\ y(\pi)=0.$

f. $\int\limits_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}\,dx, \quad y(0)=0,\ y(1)=1/e.$

g. $\int\limits_{-1}^1 (y'^2 - 2xy)\,dx, \quad y(-1)=-1,\ y(1)=1.$

h. $\int\limits_{-1}^0 (y'^2 - 2xy)\,dx, \quad y(-1)=0,\ y(0)=2.$

i. $\int\limits_1^e (xy'^2 + yy')\,dx, \quad y(1)=0,\ y(e)=1.$

3. Keressük meg azt a $J(y)$ funkcionált, melynek az Euler-Lagrange egyenlete éppen az alábbi differenciálegyenlet:
a. $x = 2y$",
b. $y'^3 = 3y'^3 + 6yy'y$",
c. $(p(x)y')' = q(x)y + r(x)$,
d. $1 = y' + y$",
e. $y'^2 \cos y = 2y'^2 \cos y + 2y\text{"} \sin y$,
f. $2y/(y^2 + y'^2) = [2y'/(y^2 + y'^2)]'$.

4. Keressük meg az extremális y-okat a következő, magasabb deriváltakat is tartalmazó funkcionálokhoz:

a. $\int\limits_0^1 (360x^2y - y\text{"}^2)\,dx, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=5/2.$

b. $\int\limits_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y\text{"}^2)\,dx, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=-\sinh 1.$

c. $\int\limits_{-1}^0 (240y - y\text{"}'^2)\,dx, \quad y(-1)=1,\ y(0)=0, y'(-1)=-4.5,\ y'(0)=0, y\text{"}(-1)=16,\ y\text{"}(0)=0..$

d. $\int\limits_0^1 (y'^2 + y\text{"}^2)\,dx, \quad y(0)=0,\ y(1)=\sinh 1,\ y'(0)=1,\ y'(1)=\cosh 1.$

5. Keressük meg az extremális y-okat a következő, több függvényt is tartalmazó funkcionálokhoz:

a. $$\int_0^{\pi/4} (2x - 4y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ z(0) = 0,\ z(\pi/4) = 1.$$

b. $$\int_{-1}^{1} (2xy - y'^2 + z'^3/3)\,dx, \quad y(-1) = 2,\ y(1) = 0,\ z(-1) = -1,\ z(1) = 1.$$

c. $$\int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1,\ z(0) = 0,\ z(\pi/2) = 1.$$

d. $$\int_0^{1} (y'^2 + z'^2 + 2y)\,dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 3/2,\ z(0) = 0,\ z(1) = 1.$$

6. Adjuk meg a funkcionált extremálissá tevő y-t a megadott feltétel mellett:

a. $$\int_0^{\pi} y'^2\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ \text{ha} \int_0^{\pi} y^2\,dx = 1.$$

b. $$\int_0^{1} y'^2\,dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 6,\ \text{ha} \int_0^{1} y\,dx = 3.$$

c. $$\int_0^{1} (x^2 + y'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ \text{ha} \int_0^{1} y^2\,dx = 2.$$

d. $$\int_0^{1} y'^2\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1/4,\ \text{ha} \int_0^{1} (y - y'^2)\,dx = 1/12.$$