Felsőbb matematika informatikusoknak B vizsgazárthelyi 2010. 01. 05.

1. [15p] Adja meg az $yu_x + xu_y = 1$ egyenlet összes megoldását.

2. [10p] Milyen c értékre lesz elliptikus, parabolikus ill. hiperbolikus az $Lu = u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy}$ operátor?

3. [15p] Legyen $\Omega = \{(x, y) : x^2+y^2 < 1\}$. Keresse meg azt az $u(x, y)$ függvényt, melyre $\Delta u = 1$ az Ω-n és $u = x$ az Ω határán.

4. [15p] Fourier-módszerrel keresse meg a következő feladat sajátértékeit és sajátfüggvényeit:

$$-\Delta u = \lambda u \ \ (0, \pi) \times (0, \pi)\text{-n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ a határon}$$

ahol $\partial u/\partial n$ jelöli a külső normális irányú deriváltat.

5. [15p] Definiálja a variációs feladatot és a hozzá tartozó első variációt. Mondja ki az Euler-Lagrange egyenletről szóló tételt és ennek a feltételes szélsőértékekre vonatkozó változatát is.

6. [15p] Definiálja a Pontrjagin függvényt, ismertesse az ezzel összefüggő optimalizálási feladatot és mondja ki a Pontrjagin maximumelvet.

7. [15p] Mondja ki a homogén lineáris elsőrendű parciális differenciálegyenlet általános megoldását megadó tételt és azt az állítást, amely megadja, hogyan lehet az inhomogén lineáris elsőrendű egyenletet visszavezetni homogén lineáris elsőrendűre. Az egyik állítást bizonyítsa be.