Előadáson csak az intervallumbeli tulajdonságokig jutottunk el. A zárthelyi anyaga a 9. gyakorlat anyagával lezárult. Tehát nincs benne inflexió, teljes függvényvizsgálat, csak olyan jellegű példák, amilyenek a 9. gyakorlatban voltak.
A 10. gyakorlati anyagról:
A lokális tulajdonságokból csak a lokális szélsőértékre és az inflexióra vonatkozó tételek kellenek, ezeket mondják ki. Ebben a félévben egyáltalán nem veszünk lineáris aszimptotát. Beszéljék meg, hogy teljes függvényvizsgálatnál mit kell csinálni! (Tehát kimarad belőle a lineáris aszimptota keresése.)
Az intervallumbeli minimum, maximum keresést is meg kell beszélni!

1. Intervallumbeli tulajdonságok, függvényvizsgálat

1. Feladat: Hol konvex, hol konkáv az

$$f(x) = x^2 \ \ln(\mathrm{e}\,x)$$

függvény? Van-e inflexiós pontja?

Megoldás. $D_f = (0, \infty)$

$f'(x) = 2x \ln(\mathrm{e}\,x) + x^2 \dfrac{1}{\mathrm{e}\,x}\,\mathrm{e} = 2x \ln(\mathrm{e}\,x) + x$

$f''(x) = 2 \ln(\mathrm{e}\,x) + 2x \dfrac{1}{\mathrm{e}\,x}\,\mathrm{e} + 1 = 2 \ln(\mathrm{e}\,x) + 3 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \ln(\mathrm{e}\,x) = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}\,x = \mathrm{e}^{-3/2} \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-5/2}$$

x	$(0\,,\, \mathrm{e}^{-5/2})$	$\mathrm{e}^{-5/2}$	$(\mathrm{e}^{-5/2}\,,\, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	(infl. pont)	$\cup$

2. Feladat: Vizsgálja meg és vázlatosan ábrázolja az

$$f(x) = \frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}$$

függvényt? Konvex-konkáv tulajdonságot, inflexiót most ne vizsgáljon!

Megoldás. $D_f = (0, \infty)$

Nullahely: $\mathrm{e}\,x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$\lim_{x\to+0} \underbrace{\frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}}_{\frac{-\infty}{+0}\ \text{alakú}} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}\ \text{alakú}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x\,\frac{1}{x} - \ln(\mathrm{e}\,x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(\mathrm{e}\,x)}{x^2} = 0 \implies \ln(\mathrm{e}\,x) = 1 \implies x = 1\,,\ f(1) = 1$$

x	$(0\,,\,1)$	1	$(1\,,\,\infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Ábra

3. Feladat:

Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!
(Ebben a félévben egyáltalán nem beszélünk a lineáris aszimptotáról idő hiányában.)

a) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$

Ez lehet HF! Ha az óra végén maradna idő, akkor csinálják csak meg!

Megoldás.

a) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$; Nullahely: $x = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \ldots = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x} = -\infty$

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

$f'(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} - x^3\,\mathrm{e}^{-x} = x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,(3 - x)$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$f(3) = 27\,\mathrm{e}^{-3} = \dfrac{27}{\mathrm{e}^3}$

$$f''(x) = 6x\,\mathrm{e}^{-x} - 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} + x^3\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}\,\underbrace{(x^2 - 6x + 6)}_{=0\,:\, x=3\pm\sqrt{3}}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$

$$R_f = \left(-\infty\,,\,\frac{27}{e^3}\right]$$

Ábra

b) $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x} = x + 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad \lim\limits_{x \to +0} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -0} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x}\right) = \pm\infty$

Nullahelyek: $\quad x = 1$, $\quad x = -2$

$$f'(x) = \left(x + 1 - \frac{2}{x}\right)' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	szak.h.	$\nearrow$

$$f''(x) = -\frac{4}{x^3}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\cup$	szak.h.	$\cap$

Ábra

Megjegyzés:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0 \implies$ A függvény, ha $x \to \pm\infty$ egyre közelebb kerül az $y = x + 1$ lineáris függvényhez (lineáris aszimptota). (Beszéljünk róla, ha a feladat befér a gyakorlatba, de a hallgatótól nem várjuk el, hogy észrevegye.)

2. Abszolút szélsőérték

1. Feladat:

$$f(x) = x^3 + \frac{48}{x^2}$$

a) Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!
b) Beszélhetünk-e a függvény maximumáról illetve minimumáról az $[1, 3]$ intervallumon? Ha igen, akkor mennyi ezek értéke?

Megoldás.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x^3 + \dfrac{48}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

Nullahely: $\quad f(x) = \dfrac{x^5 + 48}{x^2} = 0 \implies f(\sqrt[5]{-48}) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{96}{x^3} = \frac{3\,(x^5 - 32)}{x^3} = 0 \implies x = 2\ , \quad f(2) = 20$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	szak.h.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f''(x) = 6x + \frac{3 \cdot 96}{x^4} = 6 \cdot \frac{x^5 + 48}{x^4} = 0 \implies x = \sqrt[5]{-48}\ , \quad (f(\sqrt[5]{-48}) = 0)$$

x	$(-\infty, \sqrt[5]{-48})$	$\sqrt[5]{-48}$	$(\sqrt[5]{-48}, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	szak.h.	$\cup$

Ábra

b) Mivel f folytonos $[1, 3]$-ban (zárt!) $\implies$ $\exists$ min., max. (Weierstrass II. tétele.)

Mivel f az intervallumon mindenütt deriválható, a szóbajöhető pontok:
- a lokális szélsőérték: $\quad f(2) = 20$,
- az intervallum végpontjai: $\quad f(1) = 49$, $\quad f(3) = 27 + \dfrac{48}{9}$

$\implies \quad \min\limits_{x \in [1,2]} \{f(x)\} = 20$, $\qquad \max\limits_{x \in [1,2]} \{f(x)\} = 49$

2. Feladat:

$$f(x) = x^2\ \mathrm{e}^{-3x}$$

Van-e minimuma, illetve maximuma az f függvénynek a $[0\,,\,1]$ intervallumon? (Indokoljon!)

Ha igen, határozza meg!

Ha nem fér be, akkor legyen házi feladat!

Megoldás. ...

$$\min_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = f(0) = 0 \,, \qquad \max_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\,\mathrm{e}^{-2}$$

3. Implicit megadású függvények deriválása

Előadáson még egyáltalán nem volt, tehát beszéljük meg, hogy miről van szó!

1. Feladat:

Az $y(x)$ függvény az $x_0 = \mathrm{e}$ pont környezetében differenciálható és kielégíti az

$$x\,\ln y + y\,\ln x = 1$$

implicit függvénykapcsolatot.
Határozza meg ezen függvény (e,1) pontjabeli érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

Ellenőrizzük a pontot!

$$\mathrm{e}\cdot\ln 1 + 1\cdot\ln\mathrm{e} \stackrel{?}{=} 1 \qquad \text{Igaz.}$$

Tehát az $y(x)$ valóban átmegy az adott ponton: $y(\mathrm{e}) = 1\,.$

$$x\,\ln y(x) + y(x)\,\ln x = 1$$

Mindkét oldalt x szerint deriváljuk:

$$1\cdot\ln y(x) + x\cdot\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x) + y'(x)\cdot\ln x + y(x)\cdot\frac{1}{x} = 0$$

Behelyettesítve $x = \mathrm{e}$-t $(y(\mathrm{e}) = 1)$, kapjuk $y'(\mathrm{e})$-t:

$$\ln 1 + \mathrm{e}\cdot y'(\mathrm{e}) + y'(\mathrm{e})\cdot\ln\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad y'(\mathrm{e}) = -\,\frac{1}{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1)}$$

Az érintőegyenes egyenes egyenlete:

$$y_{\acute{\mathrm{e}}} = y(\mathrm{e}) + y'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1)}\,(x-\mathrm{e})$$

2. Feladat:

A differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^2 + 2\,y^5 + \mathrm{e}^{2x-2} - (x-1)^4 = 0$$

Van-e ennek a függvénynek lokális szélsőértéke az $x_0 = 1$ pontban?
Van-e inflexiója a függvénynek ugyanitt?

Megoldás.

$1 - 2 + 1 - 0 \overset{?}{=} 0$ Igaz.

Az x-től való függést már nem jelölöm, így áttekinthetőbb:

$$2y\,y' + 10y^4\,y' + 2\mathrm{e}^{2x-2} - 4(x-1)^3 = 0$$

Behelyettesítés: $x = 1$, $y = -1$

$$-2y'(1) + 10y'(1) + 4 - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = -\frac{1}{4}$$

Mivel $y'(1) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs lokális szélsőértéke $x = 1$-ben (nem teljesül a szükséges feltétel).

$$2y'\,y' + 2y\,y'' + 40y^3\,y'\,y' + 10\,y^4\,y'' + 4\mathrm{e}^{2x-2} - 12(x-1)^2 = 0$$

$x = 1$, $y = -1$, $y' = -\dfrac{1}{4}$:

$$\frac{1}{8} - 2\,y''(1) - \frac{40}{16} + 10\,y''(1) + 4 - 0 = 0$$

Elég csak felírni, hogy ebből $y''(1) = -\dfrac{13}{64}$ (ha igaz).
Mivel $y''(1) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs inflexiós pontja $x = 1$-ben (nem teljesül a szükséges feltétel).