1. Racionális törtfüggvények integrálása

1. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x =} \quad \int \frac{2x+1}{(x-2)\,(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \dots$$

$$= \int \left(7\,\frac{1}{x-2} - 5\,\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x = 7\,\ln|x-2| - 5\,\ln|x-2| + C$$

$$\boxed{\int \frac{x+1}{(x-1)^2\,(x-3)}\,\mathrm{d}x = ?}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)^2\,(x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} = \dots = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

$$I = -\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \ln|x-1| + \ln|x-3| + C$$

$$\boxed{a) \quad \int \frac{x^3}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = ? \qquad\qquad b) \quad \int \frac{x^5-15\,x}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = ?}$$

A b) feladatot nem kell részletesen végig megcsinálni. Szerintem pl. elég az együtthatók meghatározására szolgáló egyenletek felírása után csak megadni az együtthatókat és megbeszélni a befejező integrálást.

a) $\dfrac{f'}{f}$ alakú:

$$\frac{1}{4}\int \frac{4\,x^3}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\ln|x^4 - 16| + C$$

b) Áltört, át kell alakítani: $\dfrac{x^5-15\,x}{x^4-16} = x + \dfrac{x}{x^4-16}$

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \dots = \frac{1/16}{x-2} + \frac{1/16}{x+2} + \frac{-1/8\ x}{x^2+4}$$

$$\int \left(x + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}\,\ln|x-2| + \frac{1}{16}\,\ln|x+2| - \frac{1}{16}\,\ln(x^2+4) + C$$

2. Határozott integrál

1. Feladat:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\ \sin^2 x\ \mathrm{d}x\ = ?}$$

Valószínűleg nem volt még előadáson, hogy milyen módszerrel keresünk itt primitív függvényt (jegyzet, 10. fejezet). Ezért magyarázzák el! Sőt a Newton-Leibniz szabályt is mondják el, mert még talán az sem volt előadáson.

$$I\ = \int_0^{\pi/2} \cos x\ \underbrace{(\cos^2 x)^2}_{(1-\sin^2 x)^2}\ \sin^2 x\ \mathrm{d}x\ = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x\ \sin^2 x\ -\ 2\cos x\ \sin^4 x\ +\ \cos x\ \sin^6 x\right)\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - 2\,\frac{\sin^5 x}{5} + \left.\frac{\sin^7 x}{7}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}$$

2. Feladat:

$$\boxed{\int_0^{2} \mathrm{e}^{|2x-1|}\ \mathrm{d}x\ = ?}\ I\ = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{1-2x}\ \mathrm{d}x\ + \int_{1/2}^{2} \mathrm{e}^{2x-1}\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= -\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1-2x}\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x-1}\Big|_{1/2}^{2} = -\,\frac{1}{2}\,(1-\mathrm{e}) + \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^3-1)$$

3. Területszámítás

Az $f(x)$ és $g(x)$ "közé" eső terület, ha $x \in [a,b]$:

$$T\ = \int_a^b |f(x)\ -\ g(x)|\ \mathrm{d}x$$

1. Feladat:

Számítsa ki az $f(x) = x^2 + 2x$ és az $g(x) = 4 - x^2$ görbéje közötti területet!

Megoldás.

Rajzoljuk fel az $f(x)=x(x+2)$, $g(x)=(2-x)(2+x)$ görbéket.
Az ábrából látható, hogy :

$$T=\int_{-2}^{1}\left(4-x^2-(x^2+2x)\right)\ \mathrm{d}x\ =\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\ \mathrm{d}x\ =-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\Big|_{-2}^{1}\ =\ \ldots\ =\ 9$$

2. Feladat:

Mekkora az $y=\ln x$ görbéje, valamint az $y=0$, $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $x=\mathrm{e}$ egyenesek közé eső síkrész területe!

Tegyék a gyakorlat végére!!! Ha marad idő, akkor is csak a lényeget kell megbeszélni, tehát nem kell végig megcsinálni.

Megoldás.

Készítsünk ábrát!

$$T=-\int_{1/\mathrm{e}}^{1}\ln x\ \mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln x\ \mathrm{d}x\ =\ \ldots$$

Innen kezdve legyen mindenképpen H.F., de beszéljük meg, hogy parciálisan kell integrálni.

4. Integrálfüggvény

(Sajnos előadáson legfeljebb a fogalom volt. Így most csak az a feladat, hogy megértsük, hogy miről van szó, még nem foglalkozunk az integrálszámítás II. alaptételével. A következő gyakorlaton majd visszatérünk a témára.)

1. Feladat:

$$f(x)\ =\ sg(x^2-5x+4)$$

a) Ábrázolja a függvényt!
b) Írja fel az

$$F(x)\ =\int_{0}^{x}f(t)\ \mathrm{d}t$$

ún. integrálfüggvényt, ha $x\in[0,3]$!

Megoldás.

$f(x) \;=\; \operatorname{sg}\left((x-1)(x-4)\right) \;:$

Ábra

$$x \in [0\,,\,1] \;:\qquad F(x) \;=\; \int_0^x 1 \;\mathrm{d}t \;=\; x$$

$$x \in (1\,,\,3] \;:\qquad F(x) \;=\; \int_0^1 1 \;\mathrm{d}t \;+\; \int_1^x -1 \;\mathrm{d}t \;=\; 1 \;-\; t\big|_1^x \;=\; 2-x$$

Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2-x\,, & \text{ha } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

5. Integrálás helyettesítéssel

1. Feladat:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-4}\;\mathrm{d}x \;=\,? \qquad\qquad \frac{x}{2} = \operatorname{ch} t \;\text{ helyettesítéssel dolgozzon!}}$$

(Ez lehet házi feladat, mert nagyon hosszadalmas és biztosan nem lesz rá idő.)

$$X \;:=\; 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\;\mathrm{d}x \;\;:$$

Helyettesítéssel:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{ch} t \quad\Longrightarrow\quad x = 2\;\operatorname{ch} t \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x = 2\;\operatorname{sh} t\;\mathrm{d}t \qquad\qquad \left(t = \operatorname{arch}\frac{x}{2}\right)$$

$$2\int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\cdot 2\;\operatorname{sh} t\;\mathrm{d}t \;=\; 4\int \operatorname{sh}^2 t\;\mathrm{d}t \;=\; 4\int \frac{\operatorname{ch} 2t\,-\,1}{2}\;\mathrm{d}t \;=\; 2\int (\operatorname{ch} 2t\,-\,1)\;\mathrm{d}t \;=$$

$$=\; 2\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\,-\,t\right) \,+\, C \;=\; 2(\operatorname{sh} t\;\operatorname{ch} t\,-\,t) \,+\, C \;=\; 2(\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\;\;\operatorname{ch} t\,-\,t) \,+\, C$$

$$X \;=\; 2\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\cdot\frac{x}{2} \,-\, \operatorname{arch}\frac{x}{2}\right) \,+\, C \;=\; x\,\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} \;-\; 2\;\operatorname{arch}\frac{x}{2} \,+\, C$$

2. Feladat:

$$\boxed{a) \quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\;\mathrm{d}x \;=\,? \qquad\qquad b) \quad \int \frac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\;\mathrm{d}x \;=\,?}$$

Szükség esetén alkalmazza az $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést!

a) Itt nem kell helyettesítés. f'/f alakú :

$$\frac{1}{2} \int \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\ \mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{2}\ \ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) \ + \ C$$

b) Helyettesítéssel:

$$\mathrm{e}^{x} = t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

$$X: \ \int \frac{t^6}{t^2+1}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{t^5}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \ = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right)\ \mathrm{d}t \ =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ \ln\left(t^2+1\right) \ + \ C$$

$$X \ = \ \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} \ - \ \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \ + \ \frac{1}{2}\ \ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) \ + \ C$$

3. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{9x}{\sqrt{2-3x}+1}\ \mathrm{d}x \ = ? \qquad\qquad t = \sqrt{2-3x}\ \text{ helyettesítéssel dolgozzon!}}$$

$$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\ t^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\ t\ \mathrm{d}t$$

$$X: \ \int \frac{3\ (2-t^2)}{t+1}\ \left(-\frac{2}{3}\,t\right)\ \mathrm{d}t \ = \ 2 \int \frac{t^3-2t}{t+1}\ \mathrm{d}t \ = \ 2 \int \left(t^2 - t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\ \mathrm{d}t \ =$$

$$= \ 2\ \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) \ + \ C$$

$$X \ = \ 2\ \left(\frac{1}{3}\ \left(\sqrt{2-3x}\right)^3 \ - \ \frac{1}{2}(2-3x) \ - \ \sqrt{2-3x} \ + \ \ln\left(\sqrt{2-3x}+1\right)\right) \ + \ C$$

4. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}+x}\ \mathrm{d}x \ = ? \qquad\qquad t = \sqrt[3]{x}\ \text{ helyettesítéssel dolgozzon!}}$$

$$t = \sqrt[3]{x} \quad \Longrightarrow \quad x = t^3 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 3t^2\ \mathrm{d}t$$

$$X: \ \int \frac{t^2+1}{t^2+t^3}\ 3t^2\ \mathrm{d}t \ = \ 3 \int \frac{t^2+1}{t+1}\ \mathrm{d}t \ = \ 3 \int \left(t - 1 + \frac{2}{t+1}\right)\ \mathrm{d}t \ =$$

$$= \ 3\ \left(\frac{t^2}{2} - t + 2\ \ln|t+1|\right) \ + \ C$$

$$X \ = \ 3\ \left(\frac{1}{2}\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 2\ \ln|\sqrt[3]{x}+1|\right) \ + \ C$$