Tehát a *** jellel jelölt példákat az esetleg beinduló felzárkoztató (szintrehozó) kurzusokban ne vegyük, a többiben is csak akkor, ha a hallgatók "vevők rá", tehát van remény rá, hogy megértik. Ilyen példát nem adunk a ZH-kban, de segítené az anyag megértését.

A gyakorlat anyaga:

1) Nagyságrendek összehasonlítása (n^n, $n!$, 2^n, n, (n^k), $\log n$)

A $\dfrac{\infty}{\infty}$ határozatlan alak, konkrét esetekben különböző határértékeket kaphatunk, például

$$\frac{n}{n^2} \to 0\,, \quad \frac{n^3}{n} \to \infty\,, \quad \frac{3n}{5n} \to \frac{3}{5}.$$

Tétel:

$$\boxed{a)\ \frac{n^n}{n!} \to \infty; \qquad b)\ \frac{n!}{2^n} \to \infty; \qquad c)\ \frac{2^n}{n} \to \infty; \qquad d)\ \frac{n}{\log_2 n} \to \infty.}$$

Bizonyítás:

a)

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \geq n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n \to \infty \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{spec. rendőrelv}} \frac{n^n}{n!} \to \infty$$

b)

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} \geq \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4} \to \infty \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{spec. rendőrelv}} \frac{n!}{2^n} \to \infty$$

c) Legyen $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. ***

Egyrészt a sorozat monoton nő, tehát $a_{n+1} \geq a_n$, hiszen:

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{2^n}{n} \quad \Longleftarrow \quad 2n \overset{?}{\geq} n+1 \quad \Longleftarrow \quad n \geq 1$$

Másrészt a páros indexű részsorozat végtelenhez tart:

$$a_{2n} = \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2 \cdot n} = 2^{n-1} a_n \geq 2^{n-1} a_1 = 2^n \to \infty.$$

E két tulajdonságból következik, hogy $a_n \to \infty$.

d) Legyen $a_n = \dfrac{n}{\log_2 n}$. ***

Belátható, hogy a sorozat monoton nő (ezt csak később tudjuk megmutatni), és $a_{2^k} \to \infty$. Ebből a két tulajdonságból következik az állítás.

Ez már mndenkinek:

A következőt kaptuk:

$$\boxed{n^n \gg n! \gg 2^n \gg n^k \gg n^{\frac{1}{k}} \gg \log n, \qquad k \in \mathbb{N}^+}$$

Itt a „$\gg$" jelet úgy kell olvasni hogy *erősebb*, vagy *nagyobb nagyságrendű.* Ezeket a fogalmakat a félév végén pontosítjuk.

Belátható, hogy $a_n \to \infty$ -ből következik, hogy $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Ennek alapján az előzőekből következik :

$$\boxed{\frac{\log n}{n} \to 0; \qquad \frac{n}{2^n} \to 0; \qquad \frac{2^n}{n!} \to 0; \qquad \frac{n!}{n^n} \to 0}$$

2) Az előadáson már feltételezhetően volt:
$\lim a_n = A$ definíciója; példák $N(\varepsilon)$ meghatározására; konvergens sorozat korlátos; divergens sorozatok; műveletek konvergens számsorozatokkal.
Ha a példák másra is támaszkodnak, kérjük, hogy a táblára írják fel a felhasznált tételeket, nevezetes sorozatokat, stb. (Azzal a megjegyzéssel, hogy majd lesz előadáson, ha még nem volt.)

•••

Néhány feladat az előadáson tanultakkal kapcsolatban:

1. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} \to 3, \qquad N(\varepsilon) = ?}$

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} - 3\right| = \frac{n+4}{n^2+n+1} \leq \frac{n+4n}{n^2} = \frac{5}{n} < \varepsilon,$$

$$N(\varepsilon) \geq \left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$$

Persze másképp is majorálhatunk. Én általában igyekszem olyan becsléseket alkalmazni, ha lehet, amely minden n-re jó.

2. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?, \qquad N(\varepsilon) = ?}$

$$a_n \to 0, \text{ mert} \quad a_n = \frac{n^2}{n^6} \ \ldots$$

$$|a_n - A| = \left|\frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}\right| \overset{\text{ha } n \geq 10^4}{=} \frac{n^2-10^8}{5n^6+\underbrace{2n^3-1}_{>0}} < \frac{n^2}{5n^6} < \frac{1}{n^4} < \varepsilon$$

$$N(\varepsilon) \geq \max\left\{10^4, \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right]\right\}$$

3. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{2n^2+3n+6}{3n^2-1} \to \frac{2}{3}, \qquad N(\varepsilon) = ?}$ ***

Megoldás. ...

(Ez kicsit nehézkesebb feladat, elhagyható. De lehet HF. is.)

4. Feladat:

Vizsgálja konvergencia szempontjából az $a_n = \frac{(n+1)!}{(5-2n)\,n!}$ sorozatot!

$$a_n = \frac{(n+1)!}{(5-2n)\,n!} = \frac{n+1}{5-2n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}-2} \to 1\cdot\frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

5. Feladat:

Vizsgálja konvergencia szempontjából az $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ sorozatot!

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{3}{n-2} \to 0$$

●●●

Belátható, hogy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \nexists, & \text{egyébként.} \end{cases}}$$

Sőt, általában igaz, hogy az exponenciális sorozat (a^n) gyorsabban nő, illetve csökken, mint bármely hatványsorozat (n^k, $k \in \mathbb{N}^+$), tehát például

$n\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, vagy $n^3\left(\frac{-1}{5}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Összefoglalva:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^k a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1,\ k \in \mathbb{N}^+ \\ \infty, & \text{ha } a > 1,\ k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}}$$

A fenti bekeretezett formulákat bizonyítás nélkül felhasználhatjuk a feladatok megoldásánál.

●●●

Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

6. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{(-3)^{n+1} + 2^{2n+3}}{8 + 5^n}} = \dfrac{-3\cdot(-3)^n + 8\cdot 4^n}{8 + 5^n} =$

$$= \frac{-3\cdot\left(\dfrac{-3}{5}\right)^n + 8\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}{8\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1} \to \frac{0+0}{0+1} = 0$$

7. Feladat:

$$\boxed{a_n = \frac{(3)^{2n}}{(-3)^n + 10^n} \to ? \qquad b_n = \frac{(3)^{2n}}{3^n + 9^n} \to ? \qquad c_n = \frac{9^n}{3^n + 2^n} \to ?}$$

8. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{n^3\, 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3\,n^2}} = \dfrac{n^3\, 2^n + 3^n}{4^n - 3\,n^2} = \dfrac{n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - 3n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to 0$

(Felhasználtuk, hogy $n^k\, a^n \to 0$, ha $|a| < 1$.)

9. Feladat: ***

A $q \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében határozzuk meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{2^{2n}}{(-3)^n + q^n} \to ?$$

10. Feladat:

$$a_n = \sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n} \to ?$$

Legyen $\alpha = \sqrt{2n^2 + 5n}$, $\beta = \sqrt{2n^2 - n}$. Ekkor:

$$a_n = \alpha - \beta = (\alpha - \beta)\ \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{6n}{\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{2n^2 - n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=1} \cdot \frac{6}{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

11. Feladat:

$$a_n = \sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n} \to ?$$

12. Feladat: ***

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 - 3n + 8} - \sqrt[3]{n^3 + n + 1} \to ?$$

Legyen $\alpha = \sqrt[3]{n^3 - 3n + 8}$, $\beta = \sqrt[3]{n^3 + n + 1}$. Ekkor:

$$a_n = \alpha - \beta = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} = \dots$$

13. Feladat: ***

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + bn + 1}$$

Határozzuk meg a $b \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy a sorozat határértéke

$a)$ ∞ vagy $-\infty$,

$b)$ véges, nem nulla szám,

$c)$ 0 legyen!