1. $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ határértékkel kapcsolatos feladatok

(Folytatás.)

1. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{7} = \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \cdot \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^7 \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^3}\cdot 1^7 = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Másik megoldás:

$$a_n = \left(\frac{(n^2+3)-1}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)+4} = \left(1+\frac{-1}{n^2+3}\right)^{n^2+3} \cdot \left(1+\frac{-1}{n^2+3}\right)^4 \quad\to\quad \mathrm{e}^{-1}\cdot 1^4 = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

2. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}, \qquad b_n = \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{2n}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{1+\frac{5}{3n}}{1+\frac{-4}{3n}}\right)^{3n} \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-4}} = \mathrm{e}^9$$

$$b_n = \left(\frac{1+\frac{5}{3n}}{1+\frac{-4}{3n}}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{1+\frac{5/3}{n}}{1+\frac{-4/3}{n}}\right)^n\right)^2 \quad\to\quad \left(\frac{\mathrm{e}^{5/3}}{\mathrm{e}^{-4/3}}\right)^2 = \mathrm{e}^6$$

3. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

Megoldás.

ÍGY TILOS! : $\quad a_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \quad\to\quad \sqrt[n]{\mathrm{e}} \quad\to\quad 1$

Ez így "letakarás"! Ez a sejtéshez használható:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \sim \sqrt[n]{\mathrm{e}} \quad \to \quad 1$$

De precízen meg kell mutatni. (Persze kimondható lenne használható tétel, de mi nem mondtunk ki ilyent.)
Helyesen:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\mathrm{e}-0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < a_n = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\substack{\downarrow \\ \mathrm{e}}}} < \underbrace{\sqrt[n]{\mathrm{e}+0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}, \qquad \text{ha} \quad n > N_0$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1$$

Persze más becslés is jó. Pl.: $\sqrt[n]{2} \le a_n < \sqrt[n]{3}$ stb.

4. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \ge 2^n \to \infty \underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} a_n \to \infty$$

5. Feladat: ***

$$\boxed{a) \quad a_n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n^3} \qquad\qquad b) \quad b_n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n^5}}$$

Ekkor az előző két példa kihagyható.

Megoldás. $\cdots$

6. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n, \qquad c_n = \left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n}$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/4}{n}\right)^n} \to \frac{\mathrm{e}^{1/4}}{\mathrm{e}^{5/4}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$0 < b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n < \left(\frac{4n+n}{7n}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} b_n \to 0$$

$$c_n = \left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n \underset{n\geq 5}{\geq} \left(\frac{6n}{4n+n}\right)^n = \left(\frac{6}{5}\right)^n \to \infty \underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} c_n \to \infty$$

De lehet kiemeléssel is egyszerűbb alakra hozni. Pl.:

$$b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{4n}{7n}\right)^n}_{=\left(\frac{1}{4}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{1/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/7}{n}\right)^n} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{e}^{1/4}}{\mathrm{e}^{5/7}} = 0$$

2. $\limsup$, $\liminf$

1. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\cos n\,\frac{\pi}{2}\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8} \qquad \limsup a_n = ?\,, \ \liminf a_n = ?}$$

Megoldás.

$$b_n := \frac{2n^2-3}{n^2+n+8} = \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}} \to 2$$

Ha $n = 2k+1$: $a_n = 0 \to 0$

Ha $n = 4k$: $a_n = b_n \to 2$

Ha $n = 4k+2$: $a_n = -b_n \to -2$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \{-2, 0, 2\}$

$\Longrightarrow$ $\limsup a_n = 2$, $\liminf a_n = -2$

2. Feladat:

$$\boxed{a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+7}} \qquad \limsup a_n = ?\,, \ \liminf a_n = ?}$$

Megoldás.

Ha n páros: $a_n = \sqrt{\dfrac{2n^3}{3n^3+n+7}} = \sqrt{\dfrac{2}{3+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}}} \to \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Ha n páratlan: $a_n = 0 \to 0$

$$\Longrightarrow \quad \limsup a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \quad \liminf a_n = 0$$

●●●

3. Egy alkalmazás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1 \qquad \text{(Bizonyítás később.)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = \frac{n}{a} \cdot \sin\frac{a}{n} = 1\,, \qquad a \in \mathbb{R} \qquad \text{(Bizonyítás később.)}$$

1. Feladat:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{3}{n} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

2. Feladat:

Határozzuk meg az r sugarú kör területét mint a beírt szabályos n-szögek területeinek limeszét!

Megoldás.

Sajnos nem tudok rajzolni.

A szabályos n-szög egy háromszögének területe: $t_h = \dfrac{r \cdot r \cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{2}$

Így a szabályos n-szög területe:

$$t_n = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{2} = r^2 \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \pi \quad \to \quad r^2 \cdot \pi$$

4. Numerikus sorok

Előadáson a jegyzetből az 1-14. oldalakon és a 25-28. oldalakon található anyag kerül leadásra most. Még ebből is kihagyjuk a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor konvergenciájával kapcsolatos "bizonyítást". Most csak kimondjuk, hogy $\alpha > 1$-re konvergens, majd a félév végén az integrálkritériummal bizonyítjuk. Tehát ebben a félévben nem tanuljuk a hányados- és gyökkritériumot.

1. Feladat:

$$\boxed{\text{Konvergens-e a } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \text{ sor?} \quad \text{(A definícióval dolgozzon!)}}$$

Megoldás.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right) = \infty . \qquad \text{Tehát a sor divergens.}$$

4.1. Geometriai sor

Előadáson volt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = \sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = \frac{a}{1-q}\,, \text{ ha } \quad |q| < 1$$

2. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = ?} \qquad \text{(Állapítsa meg a sor összegét!)}$$

Megoldás.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^{n} = \underbrace{\frac{1}{25}\cdot\frac{-4}{5}}_{a} + \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^{2} + \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^{3} + \cdots =$$

$$= \frac{\dfrac{-4}{75}}{1-\dfrac{-4}{5}}$$

Itt $\quad q = \dfrac{-4}{5}\,, \quad |q| < 1\,,\quad$ tehát a geometriai sor konvergens.

3. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-5)^n}{3^{2n+2}} = ?}$$

Megoldás.

A sor két konvergens geometriai sor összege. Tanulni, sőt bizonyítani fogunk egy tételt, mely szerint számolhatjuk tagonként a sorösszeget és az eredményeket összegezzük.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-5)^n}{3^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \frac{8^n}{9^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{(-5)^n}{9^n} = s_1 + s_2$$

A konstans is kiemelhető:

$$s = \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{9}\right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{-5}{9}}{1 - \frac{-5}{9}}$$