1. Alternáló sorok, Leibniz sorok

(A két fogalom nem ekvivalens, beszéljünk róla!)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}+5}}$$

Megoldás.

$$c_n := \frac{1}{\sqrt[5]{n}+5} .$$

Mivel $c_n \searrow 0$ (monoton csökkenően tart nullához), a sor Leibniz típusú és így konvergens.

2. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n}$$

Megoldás.

$$c_n := \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n} \quad \to \quad \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^5} = \frac{1}{\mathrm{e}^4} \neq 0$$

Tehát az általános tag nem tart 0-hoz, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, ezért a sor divergens.

3. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{5^n}{2^n+10^n}}$$

Mutassa meg, hogy Leibniz sorról van szó!
Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

$$c_n = \frac{5^n}{2^n+10^n} = \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1} \quad \to \quad \frac{0}{0+1} = 0$$

Még meg kell mutatnunk, hogy a sorozat monoton csökkenő. (Ez most nem triviális, mert n növelésével a számláló és a nevező is nő.)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{?}{<} c_n \\ \frac{5^{n+1}}{2^{n+1}+10^{n+1}} &\overset{?}{<} \frac{5^n}{2^n+10^n} \\ 5\cdot(2^n+10^n) &\overset{?}{<} 2\cdot 2^n + 10\cdot 10^n \\ 3\cdot 2^n &\overset{?}{<} 5\cdot 10^n \\ \frac{3}{5} &\overset{?}{<} 5^n \end{aligned}$$

Ez pedig igaz minden n-re és ebből következik visszafelé, hogy $c_{n+1} < c_n$, tehát a sorozat monoton csökkenő.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sor Leibniz típusú, így konvergens.

Leibniz sorok esetén az $s \approx s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, c_k$ közelítés hibája:

$$|H| = |s - s_n| \le c_{n+1}$$

Ezért az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájáról az alábbit mondhatjuk:

$$|H| = |s - s_{99}| \le c_{100} = \frac{5^{100}}{2^{100}+10^{100}}$$

2. Majoráns kritérium, minoráns kritérium

Csak olyan példa lehet most, amelyiknél geometriai sorral vagy $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sorral lehet majorálni, minorálni.
(Mielőtt hozzáfogunk a példákhoz, beszéljünk a két kritériumról! Minden példánál beszéljük meg, hogy miért várunk konvergenciát, illetve divergenciát!)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}}$$

Megoldás.

Divergenciát várunk, mert .... Ezért a minoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7} \ge \frac{2n^3-n^3+0}{3n^4+2n^4+7n^4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n}\,; \qquad \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergens.}$$

2. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}}$$

Megoldás.

Konvergenciát várunk, mert …. Ezért a majoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7} \leq \frac{n^2-0+3n^2}{2n^5+0+0} = 2\cdot\frac{1}{n^3}\ ; \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \ \text{ konvergens}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

3. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}}}$$

Megoldás.

Konvergenciát várunk, mert …. Ezért a majoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}} = \frac{2^n+9\cdot 3^n}{1+\frac{1}{6}\cdot 6^n} \leq \frac{3^n+9\cdot 3^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} = 60\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$60\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{konvergens geometriai sor } \left(0<q=\frac{1}{2}<1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

3. Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia

Abszolút vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

1. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{2n+1}{3n^5-n^2}}$$

Megoldás.

Először mindig az abszolút konvergenciát ellenőrizzük:

$$c_n := |a_n| = \frac{2n+1}{3n^5-n^2} \leq \frac{2n+n}{3n^5-n^5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^4}\ ; \qquad \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \ \text{ konvergens}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{konvergens. Tehát a sor abszolút konvergens.}$$

2. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n^2+2}}$$

a) Abszolút vagy feltételesen konvergens-e a sor?
b) Adjon becslést az $s \approx s_{1000}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

$$c_n := \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

a) Az abszolút értékekből alkotott sor : $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergens, mert

$$c_n = \frac{2n+1}{3n^2+2} \geq \frac{2n}{3n^2+2n^2} = \frac{2}{5}\,\frac{1}{n}\,; \qquad \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{divergens.}$$

Tehát a sor nem abszolút konvergens.

Leibniz sor-e?

$$c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \; \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n^2}} \;\to\; 0 \cdot \frac{2+0}{3+0} = 0$$

Még megmutatjuk, hogy a (c_n) számsorozat monoton csökkenő.

$$c_{n+1} \overset{?}{<} c_n$$

$$\frac{2(n+1)+1}{3(n+1)^2+2} \overset{?}{<} \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

$$(2n+3)\,(3n^2+2) \overset{?}{<} (2n+1)\,(3n^2+6n+5)$$

$$0 \overset{?}{<} 6n^2+12n-1$$

Ez pedig igaz és ebből következik visszafelé, hogy $c_{n+1} < c_n$, tehát a sorozat monoton csökkenő.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sor Leibniz típusú, így konvergens.
Tehát a sor feltételesen konvergens.

b) $s \approx s_{1000} = \sum_{n=1}^{1000} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n^2+2}$ közelítés hibája:

$$|H| = |s - s_{1000}| \leq c_{1001} = \frac{2\cdot 1001\,+\,1}{3\cdot 1001^2\,+\,2}$$

4. Hibaszámítás pozitív tagú sorokra

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!
Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 100. részletösszegével közelítjük?
$(s \approx s_{100}; \quad H = r_{100} = \sum\limits_{k=101}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?)$

1. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{n+1} + \sqrt{2}}}$$

Megoldás.

$$a_n := \frac{1}{2^n + 3^{n+1} + \sqrt{2}} < \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{konvergens geometriai sor } \left(0 < q = \frac{1}{3} < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

Hibaszámítás:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{n+1} + \sqrt{2}} < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{1 - \frac{1}{3}}$$

2. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{2n+2}}{(n^2+1) \cdot (3^{2n+1} + 5^n)}}$$

Megoldás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \frac{4 \cdot 4^n}{3 \cdot 9^n + 5^n}$$

Vegyük észre, hogy $\dfrac{n^2}{n^2+1} < 1 \ \forall\, n$-re. Ezt is felhasználjuk a majorálásnál.

$$a_n \leq 1 \cdot \frac{4 \cdot 4^n}{3 \cdot 9^n} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\frac{4}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{konvergens geometriai sor } \left(0 < q = \frac{4}{9} < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

A hibaszámításnál is ugyanezt az ötletet használjuk fel:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{2n+2}}{(n^2+1) \cdot (3^{2n+1} + 5^n)} < \frac{4}{3} \cdot \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{101}}{1 - \frac{4}{9}}$$