

1. Valós egyváltozós függvények határértékszámítása

1. Feladat:

A megfelelő definícióval bizonyítsa be az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4) = 7 & b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 - 2x^2}{x + 2} = 8 \\ c) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{1 - 5x} = 4 \end{array}$$

Megoldás.

a) Írjuk fel a definíciót, mielőtt hozzáfogunk a megoldáshoz!

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &= |3x + 4 - 7| = |3x - 3| = 3|x - 3| < \varepsilon \\ \implies |x - 3| &< \frac{\varepsilon}{3} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) |f(x) - A| &= \left| \frac{8 - 2x^2}{x + 2} - 8 \right| = \left| \frac{2(4 - x^2)}{x + 2} - 8 \right| \underset{x \neq -2}{=} |2(2 - x) - 8| = |-2x - 4| = \\ &= 2|x + 2| < \varepsilon \implies |x + 2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) |f(x) - A| &= |\sqrt{1 - 5x} - 4| = \left| (\sqrt{1 - 5x} - 4) \frac{\sqrt{1 - 5x} + 4}{\sqrt{1 - 5x} + 4} \right| = \\ &= \frac{|1 - 5x - 16|}{\sqrt{1 - 5x} + 4} = \frac{5|x + 3|}{\sqrt{1 - 5x} + 4} \leq \frac{5|x + 3|}{0 + 4} < \varepsilon \\ \implies |x + 3| &< \frac{4\varepsilon}{5} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

2. Feladat:

A megfelelő definícióval bizonyítsa be az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x}{x + 3} = -2$$

Megoldás.

A megfelelő definíciók:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A : \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists P_1(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x > P_1(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A : \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists P_2(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x < -P_2(\varepsilon)$$

Készítsünk ábrát is a jobb megértéshez!

$$|f(x) - A| = \left| \frac{1-2x}{x+3} + 2 \right| = \left| \frac{1-2x+2x+6}{x+3} \right| = \frac{7}{|x+3|} < \varepsilon \implies |x+3| > \frac{7}{\varepsilon}$$

$$x \rightarrow \infty : \quad x+3 > \frac{7}{\varepsilon} \implies x > \frac{7}{\varepsilon} - 3 = P_1(\varepsilon)$$

$$x \rightarrow \infty : \quad -(x+3) > \frac{7}{\varepsilon} \implies x < -\left(\frac{7}{\varepsilon} + 3\right) = -P_2(\varepsilon)$$

3. Feladat:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{(x^2 - 4)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = ? , \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \underbrace{\frac{1}{(x+2)^2}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^2 + 3x - 10}{(x-2)^2}}_{\rightarrow -12/16} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \underbrace{\frac{x-2}{(x-2)(x-2)}}_{\substack{= \frac{1}{x-2} \\ \rightarrow \pm\infty}} \cdot \underbrace{\frac{x+5}{(x+2)^2}}_{\rightarrow 7/16} = \pm\infty$$

4. Feladat:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + 1}{x^7 + 4x^3 + 5} = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{x^5}{x^7}}_{\substack{= \frac{1}{x^2} \\ \rightarrow 0}} \cdot \underbrace{\frac{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^7}}}_{\rightarrow 2} = 0$$

5. Feladat:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} = ? ,$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{\sqrt{3x^2+1}+2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2x)}{3x^2+1-4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{-(x+1)} = 1 \cdot \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

6. Feladat:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3}) = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3}) &\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{x^2+1-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_x} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -1 \cdot \frac{4}{1+1} = -2 \\ &= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1 \end{aligned}$$

7. Feladat:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} 2 + 5\{x\} = ? \qquad b) \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} [x-1] = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} 2 + 5\{x\} = 2 + 5 \cdot 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} 2 + 5\{x\} = 2 + 5 \cdot 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} [x-1] = 2, \quad \text{mert } x \in (3, 4) \text{ esetén } x-1 \in (2, 3) \implies [x-1] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} [x-1] = 1, \quad \text{mert } x \in (2, 3) \text{ esetén } x-1 \in (1, 2) \implies [x-1] = 1$$

8. Feladat:

$$\text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \text{ nem létezik!}$$

Megoldás. ...

2. Szakadások típusai

Hol és milyen szakadásai vannak az alábbi függvényeknek? (Mindig határozza meg a jobb és bal oldali határértékeket a vizsgálandó pontokban!)

1. Feladat:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2(x+3)}$$

Megoldás.

f két folytonos függvény hányadosa, így csak a nevező nullahelyeinél van szakadása.

Vizsgálandó pontok: $x = 0$, illetve $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x+3}}_{\rightarrow 1} = +\infty : \quad x = 0 \text{ másodfajú szakadási hely.}$$

$x = -3$ -ban a határérték $\frac{0}{0}$ alakú, tehát a számlálóból is kiemelhető az $(x+3)$ gyöktényező.

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = \dots = (x+3)(x^2 - 2x + 1)$$

(A polinomosztást szép lassan csináljuk, nem mindenki ismeri.)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \underbrace{\frac{x+3}{x+3}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}}_{\rightarrow 16/9} = \frac{16}{9} : \quad x = -3 \text{-ban megszüntethető szakadása van.}$$

2. Feladat:

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{|2x^2 - 6x|}$$

Megoldás.

f két folytonos függvény hányadosa, így csak a nevező nullahelyeinél van szakadása.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{|x|} \cdot \frac{x-3}{|x-3|}$$

Vizsgálandó pontok: $x = 0$, illetve $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{x}}_{=x^2 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{|x-3|}}_{\rightarrow -1} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{-x}}_{=-x^2 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{|x-3|}}_{\rightarrow -1} = 0 :$$

$x = 0$ megszüntethető szakadási hely.

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{\rightarrow 3} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\rightarrow 1} = \frac{9}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{\rightarrow 3} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{-(x-3)}}_{\rightarrow -1} = -\frac{9}{2} :$$

$x = 3$ -ban véges ugrása van.

3. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|4-x|} + \frac{1}{4-x}, & \text{ha } x \geq 2 \\ \frac{x^2 - 10x}{x^2 - 11x + 10}, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

Megoldás.

Ha $x < 2$: $f(x) = \frac{x(x-10)}{(x-1)(x-10)}$

Értelmezési tartomány: $x \neq 4, x \neq 1$

Vizsgálandó pontok: 1, 2, 4

$$f(1 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\rightarrow \pm \infty} x \frac{x-10}{x-10} = \pm \infty \quad \text{másodfajú (lényeges) szakadás.}$$

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x(x-10)}{(x-1)(x-10)} = 2 \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{1}{|4-x|} + \frac{1}{4-x} \right) = 1$$

f -nek $x = 2$ -ben véges ugrása van (elsőfajú szakadás)

$$f(4+0) = \lim_{x \rightarrow 4+0} \underbrace{\left(\frac{1}{-(4-x)} + \frac{1}{4-x} \right)}_{=0} = 0$$

$$f(4-0) = \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{4-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{2}{4-x} = \infty$$

$x = 4$: másodfajú szakadási hely

4. Feladat:

Hol folytonos, hol milyen szakadása van?

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Megoldás. ...