1. Elemi függvények (folyt.)

Beszéljük meg az *arcsinx* függvény tulajdonságait (értelmezési tartomány, értékkészlet, ábra, derivált), majd :

1. Feladat:

$$f(x) = 3\pi \, - \, 2 \arcsin(3-2x)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Írja fel az $x_0 = \dfrac{7}{4}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

c) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!
$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás.

a) $-1 \le 3-2x \le 1 \; \ldots \quad \Longrightarrow \quad D_f = [1,2]$

$3-2x \in [-1,1] \quad \Longrightarrow \quad \arcsin(3-2x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Longrightarrow \quad 2\arcsin(3-2x) \in [-\pi\,,\,\pi] \quad \Longrightarrow \quad R_f = [2\pi\,,\,4\pi]$

$$f'(x) = -2\,\frac{1}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}\,(-2) \, = \, \frac{4}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}\,, \quad x \in (1,2)$$

b) $y = f\left(\dfrac{7}{4}\right) + f'\left(\dfrac{7}{4}\right)\left(x - \dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{10}{3}\pi + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{7}{4}\right)$

c) $f'(x) > 0$, ha $x \in (1,2)$ és f folytonos $[1,2]$-ben, ezért f szigorúan monoton nő D_f-en, így a teljes értelmezési tartományban invertálható.

$y = 3\pi \, - \, 2\arcsin(3-2x) \quad \Longrightarrow \quad \ldots \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(3 - \sin\dfrac{3\pi - x}{2}\right)$

$D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi\,,\,4\pi]$, $R_{f^{-1}} = D_f = [1,2]$

2. Feladat:

Deriválja az alábbi függvényeket!

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} 5x^2\,, & \text{ha } x \ge 0 \\ \operatorname{sh} 2x \, - \, 3x\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = (1+x^4)^{2x}$$

Megoldás. Rajzoljuk fel az $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvényeket!

$f(0+0) = f(0) = \operatorname{ch} 0 = 1 \neq f(0-0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ nem folytonos $x = 0$-ban

$\Longrightarrow \quad f'(0) \nexists$

Egyébként f deriválható függvények összetétele és így deriválható:

$$f'(x) = \begin{cases} 10x \ \operatorname{sh} 5x^2 \ , & \text{ha } x > 0 \\ \\ 2 \ \operatorname{ch} 2x \ - \ 3 \ , & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

g exponenciális hatványfüggvény, ennek megfelelően deriváljuk:

$g(x) = \mathrm{e}^{\ln (1+x^4)^{2x}} \ = \ \mathrm{e}^{2x \ \ln (1+x^4)}$

$$g'(x) = \mathrm{e}^{2x \ \ln (1+x^4)} \cdot (2x \ \ln (1+x^4))' \ = \ (1+x^4)^{2x} \cdot \left(2 \ \ln (1+x^4) \ + \ 2x \frac{4x^3}{1+x^4} \right)$$

2. L'Hospital szabály

1. Feladat:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2\,x^3}{\operatorname{arsh} 5\,x^3} = ?$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3\,x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = ?$

c) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x^2 \ \mathrm{e}^{-5x} = ?$

d) $\displaystyle \lim_{x \to +0} \sqrt{x} \ \ln x^7 = ?$

e) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = ?$

f) $\displaystyle \lim_{x \to +0} x^{\operatorname{tg} x} = ?$

g) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{8x} - 2\,\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-3x}} = ?$

h) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sh}(3x-2)}{\operatorname{ch}(3x+4)} = ?$

Megoldás.

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2\,x^3}{\operatorname{arsh} 5\,x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+(2x^3)^2} \ 6x^2}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(5x^3)^2}} \ 15x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{5} \frac{\dfrac{1}{1+(2x^3)^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(5x^3)^2}}} = \frac{2}{5}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3\,x^2}{\operatorname{tg}^2 x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+(3x^2)^2}} \ 6x}{2 \ \operatorname{tg} x \ \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} 3 \frac{1}{\sqrt{1+9x^4}} \frac{x}{\sin x} \cos^3 x \ = \ 3$$

c) $$\lim_{x \to \infty} x^2 \ \mathrm{e}^{-5x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{5x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{5 \ \mathrm{e}^{5x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{25 \ \mathrm{e}^{5x}} \ = \ 0$$

d) $$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \ \ln x^7 = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x^7}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +0} \frac{7 \ \ln x}{x^{-1/2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to +0} \frac{7 \ \dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2} \ x^{-3/2}} =$$

$$= \lim_{x \to +0} -14 \ \sqrt{x} \ = \ 0$$

e) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\,\ln x\,-\,x\,+\,1}{(x-1)\,\ln x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x\,+\,x\,\dfrac{1}{x}\,-\,1}{\ln x\,+\,(x-1)\,\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x\,+\,1\,-\,\dfrac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}\,+\,\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{x\to +0}x^{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to +0}\mathrm{e}^{\ln x^{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to +0}\mathrm{e}^{\operatorname{tg}x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^0=1\text{ , mert}$$

$$\lim_{x\to +0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to +0}-\frac{\sin x}{x}\,\sin x=0$$

g) A L'Hospital szabály alkalmazása most nem vezetne eredményre.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\mathrm{e}^{8x}-2\,\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^{-3x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-3x}}\;\frac{\mathrm{e}^{11x}-2}{\mathrm{e}^{8x}+1}=1\cdot\frac{0-2}{0+1}=-2$$

h) Itt sem vezet eredményre a L'Hospital szabály. Beírva a függvények definícióját, az előző pédához hasonlóan járhatunk el:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(3x-2)}{\operatorname{ch}(3x+4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{3x-2}\,-\,\mathrm{e}^{-(3x-2)}}{\mathrm{e}^{3x+4}\,+\,\mathrm{e}^{-(3x+4)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}}\;\frac{\mathrm{e}^{-2}\,-\,\mathrm{e}^{-6x+2}}{\mathrm{e}^{4}\,+\,\mathrm{e}^{-6x-4}}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{4}}$$

3. Intervallumon deriválható függvények tulajdonságai

Az előadásokon erről még nem nagyon volt szó. Ezért a gyakorlatokon mindig részletesen mondják el a felhasznált tételeket!

1. Feladat:

$$f(x)\;=\;(x-3)^3\,(x+5)^4$$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton!
b) Hol van lokális szélsőértéke?

Megoldás.

$$f'(x)\;=\;3(x-3)^2\,(x+5)^4\;+\;(x-3)^3 4(x+5)^3\;=\;\ldots\;=\;\underbrace{(x-3)^2(x+5)^2}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x+5)(7x-3)}_{\text{rajzoljuk fel!}}$$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$\left(-5,\frac{3}{7}\right)$	$\frac{3}{7}$	$\left(\frac{3}{7},3\right)$	3	$(3,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Tehát f szigorúan monoton nő: $(-\infty,-5)$ és $\left(\frac{3}{7},\infty\right)$ intervallumokon,

f szigorúan monoton csökken: $\left(-5, \frac{3}{7}\right)$-en.

$x = -5$-ben lokális maximum van, mert f növekvőből csökkenőbe megy át.

$x = \frac{3}{7}$-ben lokális minimum van, mert f csökkenőből növekvőbe változik.

2. Feladat:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

Keresse meg azokat az intervallumokat, melyeken a függvény
- monoton nő, illetve monoton csökken;
- alulról konvex, alulról konkáv.

Megoldás.

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2) = \ln\underbrace{((x+1)^2 + 1)}_{\geq 1} \quad \Longrightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Tehát f (szigorúan) monoton csökken $(-\infty, -1)$-en és (szigorúan) monoton nő $(-1, \infty)$-en.

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x\,(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

A nevező ≥ 1, a számlálóban levő parabolát pedig rajzoljuk fel!

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	(infl. pont)	$\cup$	(infl. pont)	$\cap$

4. Néhány további példa

Még adok néhány példát. Akinek marad ideje, ebből válogathat, vagy csináljon hasonlót!

Ismételjük át az $arccosx$ függvény tulajdonságait (értelmezési tartomány, értékkészlet, ábra, derivált), majd :

1. Feladat:

$$f(x) = \arccos\frac{4}{x^2} - \frac{\pi}{2}$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$
b) Adja meg a -5 pontot tartalmazó azon legbővebb intervallumot, melyen f invertálható! $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás.

a) f páros függvény.

ÉT.: $\left|\frac{4}{x^2}\right| \leq 1 \implies |x| \geq 2$

$0 < \frac{4}{x^2} \leq 1$ miatt $\arccos\frac{4}{x^2} \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \implies R_f = \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,0\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)^2}} \cdot \dfrac{-8}{x^3} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)^2}} \cdot \dfrac{8}{x^3}$, ha $|x| > 2$.

$f'(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, -2)$ és f folytonos $I = (-\infty, -2]$-n $\implies$ f szigorúan monoton csökken I-n, tehát invertálható I-n. $(-5 \in I)$

$y = \arccos\frac{4}{x^2} - \frac{\pi}{2} \implies \ldots \quad f^{-1}(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}}$

$D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,0\right)$, $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -2]$

2. Feladat:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-3x}$$

Hol monoton növő, illetve csökkenő az f függvény?
Hol van lokális szélsőértéke?

Megoldás.

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-3x} + x\,\mathrm{e}^{-3x}\,(-3) = (1-3x)\,\mathrm{e}^{-3x} = 0\,, \quad \text{ha } x = \frac{1}{3}\,.$$

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-1}$$

3. Feladat:

$$f(x) = 2x^6 - 15x^5 + 20x^4$$

Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?

Megoldás.

$$f'(x) = 12\,x^5 - 75\,x^4 + 80\,x^3$$

$$f''(x) = 60\,x^4 - 300\,x^3 + 240\,x^2 = \underbrace{60x^2}_{\geq 0}\,\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{(x-1)\,(x-4)}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, \infty)$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$

4. Feladat:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiója az f függvénynek?

Megoldás.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,(-2x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,(-2x) - 4x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,(-2x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,(4x^3 - 6x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,2x\,(2x^2 - 3)$$

Ábrázoljuk vázlatosan a $2x\,(2x^2 - 3)$ függvényt, mert így könnyebb az előjelvizsgálat!

(Harmadfokú polinom, nullahelyek: $-\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\ 0\,,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,;$
$+\infty$ -ben $+\infty$ -hez tart a függvény és $-\infty$ -ben $-\infty$ -hez tart a függvény.)

Ennek alapján:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$