2008-2009/1. A1 **2. feladatsor: sorozatok, komplex számok**

1. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk N küszöböt ε-hoz a definíció alapján! Melyik sorozat monoton?
   a) $\lim \frac{1}{n}$ b) $\lim (-1)^n$ c) $\lim \frac{3n-1}{4n+99}$ d)* $\lim \frac{7n+4}{2n-1}$ e)* $\lim \frac{n-6}{6n^2+16}$

2. Lenkétől vizsgán megkérdezik a sorozat konvergenciájának fogalmát. Ezt válaszolja:
   „Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan a szám, amelyhez a_n egyre közelebb kerül." Meg fog bukni?
   Lenke az ismételt vizsgán is ugyanezt a kérdést kapja. Most így felel:
   „Az a_n sorozat pontosan akkor tart a-hoz, ha $|a_n - a|$ tart 0-hoz." Most átmegy?

3. Írjuk fel formulával (minél kevesebb zárójellel) az a_n sorozatra vonatkozó állításokat:
   a) a_n korlátos b) a_n monoton növekvő c)* $a_n \not\to a$ d)* a_n divergens

4.* Ha a_n is és b_n is divergens, akkor lehet-e...
   a) $(a_n + b_n)$ és $(a_n - b_n)$ egyszerre konvergens?
   b) $(a_n b_n)$ és (a_n/b_n) egyszerre konvergens?

5. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

6. Mi lehet z, ha...
   a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$ b) $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = \sqrt{2}$
   c)* $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$ d)* $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z-2| = 3$

7. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
   a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$ b)* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 3\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < -2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| = 2\}$ e)* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+2i| = \pi\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| = |z-2|\}$
   g)* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z|\}$ h) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 3\}$ i)* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$
   j) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ k)* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \bar{z}\}$ l) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < \arg z < 2\}$

8.* Hol a hiba? $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

Emlékeztető

– Az a_1, a_2, ... a_k, ... valós számokból álló *sorozatot* (a_n) jelöli.
  Ha az a_n sorozatban minden k-ra $a_k \leq a_{k+1}$, akkor a sorozat *monoton növekvő*. Hasonlóan definiálható a *monoton csökkenés*.

– $\lim a_n = a$ (vagy $a_n \to a$), ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Ekkor a_n *konvergens*, különben *divergens*.

– A *komplex számok* a $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú számok, ahol $i = \sqrt{-1}$. Az itt szereplő a a szám *valós része*, azaz $\operatorname{Re}(z) = a$, míg b az *imaginárius*, vagy *képzetes része*, azaz $\operatorname{Im}(z) = b$.
  Minden 0-tól különböző komplex szám alkalmas $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$-vel egyértelműen írható $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba. Itt r a szám *abszolút értéke*, azaz $|z| = r$, φ az *argumentuma*, azaz $\arg(z) = \varphi$.
  Egy $z = a + ib$ komplex szám *konjugáltja*: $\bar{z} = a - ib$.