2008-2009/1. A1 **3. feladatsor: műveletek komplex számokkal**

1. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$, esetleg $r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba!

a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$ b) i^5 c)* i^{2009} d) $\dfrac{3-2i}{-2+i}$

e) $\dfrac{3-2i}{3i}$ f)* $\dfrac{2-i}{i-1}$ g) $(1-i)^{997}$ h) $\sqrt{2}$

i) $\sqrt{-3}$ j) $\sqrt[3]{1}$ k) $\sqrt[3]{1+i}$ l)* $\left(1+\sqrt{-3}\right)^2$

m)* $\sqrt{i}$ n)* $\sqrt[3]{27i}$ o)* $(1+i\sqrt{3})^{100}$ p)* $\sqrt{\dfrac{i}{i-3}}$

2.* Egy szabályos hatszög egyik csúcsa $2 + i$, középpontja $3 + 2i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

3. Mutassuk meg, hogy ha z_0 és z_1 két komplex szám, akkor $|z_0 - z_1|$ a komplex számsíkon ábrázolt z_0 és z_1 pontok távolságát adja.

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében. Az egyenletekben szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!

a) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$
b) $z^3 - 8 = 0$
c) $\bar{z} - z = 0$
d)* $\bar{z} - z^2 = 0$
e)* $z^6 + 16z^2 = 0$

5.* Legyen f egy valós együtthatós polinom.

a) Lássuk be, hogy $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
b) Lássuk be, hogy ha z gyöke f-nek, akkor $\bar{z}$ is gyök.
c) Lássuk be, hogy f komplex gyökeinek száma páros.
d) Igaz a fentiek állítások valamelyike komplex együtthatós polinomokra is?

6.* Legyen z egy tetszőleges komplex szám. Mi a következő 4 szám viszonya?

a) z b) $|z|$ c) $\sqrt{z^2}$ d) $\left(\sqrt{z}\right)^2$

7.* Melyek tulajdonságok értelmezhetőek az alábbiakból egy komplex számokból álló (z_n) sorozatra?

a) korlátosság b) monotonitás c) konvergencia

8.* Pistike rondán ír, és a füzetében nem tudja eldönteni, hogy egy helyen $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) vagy pedig z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) áll. Van olyan z komplex szám, amelyre ez a két szám egyenlő?

Emlékeztető

– $(r\cos\alpha + ri\sin\alpha)(s\cos\beta + si\sin\beta) = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

– $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$ ahol $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)$

– $\sqrt[n]{1}$ értékei az n. *egységgyökök.* Ezeket argumentumuk szerinti növekvő sorrendben számozzuk meg: 0., 1., $\ldots (n-1)$.