2008-2009/1. A1 **5. feladatsor: speciális sorozatok**

1. Számold ki a következő határértékeket:

a) $\lim \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$ b) $\lim \dfrac{n^{2/3}+8n^{\sqrt{3}}+\sqrt{n}+12}{n^2+5n-7}$

c) $\lim \left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9}\right)$ d) $\lim \left(\sqrt{2n^2+5n-3}-\sqrt{2n^2-n}\right)$

e)* $\lim \dfrac{n^3 2^n+3^n}{n^{2n}-3n^2}$ f)* $\lim \dfrac{7^n+n^7+7}{2^{2n}+(2n)^2+2}$

g)* $\lim \left(\sqrt{n^4+2n}-n^2\right)$ h)* $\lim \left(\sqrt[3]{n^3-3n+3}-\sqrt[3]{n^3+123n^2-1}\right)$

2. Igaz? Hamis?

a) ha $a_n \to a$, akkor $a_n^2 \to a^2$

b) ha $a_n^2 \to a^2$, akkor $a_n \to a$

c) ha $a_n > 0$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$

3. Számoljuk ki:

a) $\lim \left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$ c) $\lim \left(1+\dfrac{\alpha}{\beta n}\right)^{\gamma n+\delta}$

d) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n}$ e)* $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$ f)* $\lim \left(\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

4. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$, számoljuk ki:

a) $\lim \sqrt[99n]{n}$ b) $\lim \sqrt[n]{99n^{99}}$ c) $\lim \sqrt[n^2]{n}$ d)* $\lim \sqrt[n!]{n}$ e)* $\lim \sqrt[n]{n!}$

5.* A plutónium-238 felezési ideje 87.7 év. Jelöljük a_n-el egy gyártáskor 50 kilogramm Pu-238-at tartalmazó atombombában n év eltelte után maradó Pu-238 tömegét. Írjuk fel az a_n sorozatot! Hányadik évben fog a Pu-238 tömege 0.1 kilogramm alá csökkenni?

6.* Adjunk a_n-re vonatkozó szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $1/a_n$ sorozat korlátos legyen!

Emlékeztető

– A *rendőr-szabály*, vagy *csendőr elv*: Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = h$, akkor $b_n \to h$ is.

– Az a_n sorozat *gyorsabban tart* $+\infty$-hez mint b_n, azaz $a_n \gg b_n$, ha $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.
A gyorsasági sorrend: $n^n \gg n! \gg c^n \gg n^k \gg n^{1/k} \gg \log n$.

– Előadáson láttátok, hogy az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékére bevezettük az e jelölést.
Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\lim \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

– A BME Matematika Intézete ingyenes konzultációkat szervez idén is. A konzultáción matematikushallgatók és doktoranduszok várják azokat, akiknek kérdésük van a matematika A1, A2, A3 és A4 tárgyak anyagával kapcsolatban. A konzultációk heti két alkalommal, keddenként és csütörtökönként 16.00-19.00-ig lesznek a K épület 363 termében.