1] a) $z = re^{i\varphi}$, ahol $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$, $\varphi = \arg z$,

b) $\frac{1}{z} = \frac{1+i}{2i} - 1 = \frac{1-i}{2i}$, $z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = i-1$

2] a) $\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-x_2}{v_2} = \frac{z-x_3}{v_3}$; ha $v_1=0$, akkor $x=x_1$, $\frac{y-x_2}{v_2}=\frac{z-x_3}{v_3}$; ha $v_1=v_2=0$, akkor $x=x_1$, $y=x_2$

b) Az irányvektor $(-2,1,4)$, a $t=0$-hoz tartozó pont $(1,0,3)$, tehát $(1,0,3)-(1,1,1) = (0,-1,2)$ is a síkban halad. Ezért a sík normálvektora

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (6,4,2) \Rightarrow \text{a sík egyenlete } 3x+2y+z=3+2+1=6$$

3] a) $\lim a_n = A$, ha $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists N$, hogy $|a_n - A|<\varepsilon$ $\forall n\ge N$-re. Ezért pl $\varepsilon=1$-nél $A-1<a_n<A+1$ minden $n\ge N$-re, $n<N$ indexű tag pedig csak véges sok van, tehát a sorozat korlátos.

b_1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}$

b_2) $\frac{n^{15}}{15^n} \to 0$, mert $\frac{n^k}{a^n} \to 0$, ha $a>1$ és k rögzített

4] a) Ha $f\in C[a,b]$ deriválható (a,b)-n és $f(a)=f(b)$, akkor $\exists c\in(a,b)$, ahol $f'(c)=0$

b_1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{e^x} = 1$ b_2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left[\sin x^{\frac{1}{\cos x}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1$

5] a) $(f\circ g)' = f'\circ g \cdot g'$, ha g diffható x-ben és f diffható $g(x)$-ben

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, ha f és g diffható x-ben és $g(x)\neq 0$

b) $f' = \frac{2x}{1+x^2}$, $f'' = \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0 \iff |x|<1$

Ezért f konvex $[-1,1]$-en, konkáv $(-\infty,-1]$-en és $[1,\infty)$-en, ± 1 inflexiós pontok.

6] a) Ha f integrálható $[a,b]$-n és F az f primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

b) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} \underset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{=} \int \frac{2t\,dt}{(1-t^2)t} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{|1-\sqrt{x}|} + C$, $x>0$, $x\neq 1$

7] a) Ha $|f|\le g$, $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ konvergens, f integrálható $[a,b]$-n $\forall \alpha<a<b<\beta$-ra, akkor $\int_\alpha^\beta f$ is konvergens

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$\cos x$-ben páratlan $\Rightarrow \sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

$= \ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$