1] a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$, az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ élű ferde hasáb előjeles térfogata (+, ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbrendszer)

b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} = \left(e^{2\pi \frac{i}{3}}\right)^{2010} = e^{2\pi i \cdot 670} = 1$

2] a) Ha $\{a_n\}$ növő és korlátos, akkor konvergens és $\lim a_n = \sup a_n$
Ha $\{a_n\}$ csökkenő és korlátos, akkor konvergens és $\lim a_n = \inf a_n$

b) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ növő $\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} < \frac{1}{e^n} \to 0 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to 0$ (rendőrelv)

$\frac{\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-n}}{n} = \frac{2n}{n(\sqrt{n^3+n} + \sqrt{n^3-n})} \to 0$

3] a) $\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall x_n \to a,\ x_n \neq a$ sorozatra $f(x_n) \to A$

b) 

Hasonló háromszögekből $\frac{3-r}{m} = \frac{3}{5}$, $m = \frac{5}{3}(3-r)$, $V = r^2\pi \cdot m =$
$= \frac{5}{3}\pi \cdot r^2(3-r)$; $[r^2(3-r)]' = 2r(3-r) - r^2 = 6r - 3r^2$, belső pontba $r=2$
Ezért V maximuma $r=2$-nél van, akkor $V = \frac{20\pi}{3}$

4] a) $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ekkor $f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \to f'(a)\cdot 0 = 0$
Ezért $f(x) \to f(a)$, azaz f folytonos a-ban.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(\cos\frac{\pi}{4})}{\sin^2\frac{\pi}{4}} =$

$= 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\ln 2$

5] a) Ha $f'(a)=0$ és $f''(a)>0$, akkor a-ban lokális minimuma van f-nek.

b) $f' = (5+5x-10)e^x = (5x-5)e^x$, $f'' = (5+5x-5)e^x = 5xe^x > 0 \iff x > 0$
Vagyis f konvex $[0,\infty)$-en, konkáv $(-\infty, 0]$-n.

6] a) Ha f és g folytonosan diffható, akkor $\int f'g\,dx = f(x)g(x) - \int f g'\,dx$
Ezt deriválással az $f'g = (fg)' - fg'$ ismert azonosságra jutunk.

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2|x|+1)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin(2x+1)\,dx = 2\left[-\frac{\cos(2x+1)}{2}\right]_{x=0}^{\pi} = 2\,\frac{\cos 1 - \cos(2\pi+1)}{2} =$
$= 0$

7] a) $V = \pi\int_a^b f^2\,dx$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25-(2x+3)^2}} = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{5}{2}\cdot \arcsin\frac{2x+3}{5}\right]_{x=0}^{1} =$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} - \arcsin\frac{3}{5}\right) \left(= \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)$