1 a) $d = \frac{|(P-P_0)\cdot n|}{|n|}$

b) $\frac{i \pm \sqrt{-1-4}}{2} = i\,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (másodfokú megoldóképlettel)

2 a) lim sup a_n (lim inf a_n) az $\{a_n\}$ konvergens részsorozatainak limeszei közül a legnagyobb (legkisebb).

b) $\frac{2+2n}{2+4n} \to \frac{1}{2}$, tehát $\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} < \left(\frac{2+2n}{2+4n}\right)^{\frac{1}{n}} < \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$ ha $n \geq n_0$. A rendőrelv szerint $\left(\frac{2+2n}{2+4n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$

~~$b_{2n} = 2+10n \to +\infty$, b_{2n+1}~~ $= \frac{n}{2^n} \to 0$ miatt $b_n \to 2$

3 a) megszüntethető, ha $\exists \lim_a f$, véges, de $\neq f(a)$ } elsőfajú
ugrás, ha $\exists \lim_{a\pm 0} f$, végesek, de különbözők }
másodfajú a többi esetben (ha valamelyik limesz $\pm\infty$ vagy nem létezik).

b) $x \neq 0$-ban folytonosak, mert x, $\frac{1}{x}$, $\sin x$ folytonos.
$\lim_0 f = \lim \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0)$, folytonos 0-ban; $\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ nem létezik, másodfajú

4 a) Ha $f \in C[a,b]$, diffható (a,b)-n, akkor $\exists c \in (a,b)$, hogy $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

~~b)~~ $a < x_1 < x_2 < b$-re $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{0}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, f konstans

b) $\lim_{0+} \frac{\ln\cos x}{x} \overset{0/0}{\underset{l'H}{=}} \lim \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1} = 0$ miatt $\lim (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$

6 a) $\frac{x^2+ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$; $= \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{x-\gamma}$ ha $\alpha = \beta$,
$= \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$ ha $\alpha = \beta = \gamma$

$\frac{x^2+ax+b}{(x-\alpha)(x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}$

b) $\frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, $x^2+2x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = \underbrace{(A+B)}_{1}x^2 + \underbrace{(B+C)}_{2}x + \underbrace{(A+C)}_{2}$

$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{2}$, $\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + c$, $x \neq -1$

5 a) $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

b) $f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2-2x-3) = 3(x-3)(x+1) \Rightarrow x = 3, -1$-ben lehet lok. szé. Tehát 3-ban lok. min ~~max~~, -1-ben lok. max.
$f'' = 6x - 6 > 0$, ha $x = 3$, < 0, ha $x = -1$.

7 ~~a)~~ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac} \\ 0 & x \text{ irrac} \end{cases}$ korlátos, de $\notin R[0,1]$, mert bármely felosztásnál $s_p = 0$, $S_p = 1$

b) $\int \frac{\mathrm{th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\mathrm{th}\,t}{t}\,2t\,dt = 2\int \mathrm{th}\,t\,dt = 2\ln\mathrm{ch}\,t + c = 2\ln\mathrm{ch}(\sqrt{x}) + c$, $x > 0$
$x = t^2$
$dx = 2t\,dt$