

A GYAKORLATI MATEMATIKA INTEGRÁLÓ MŰSZEREIRŐL

Irta : *Borbély Samu* (Kolozsvár)

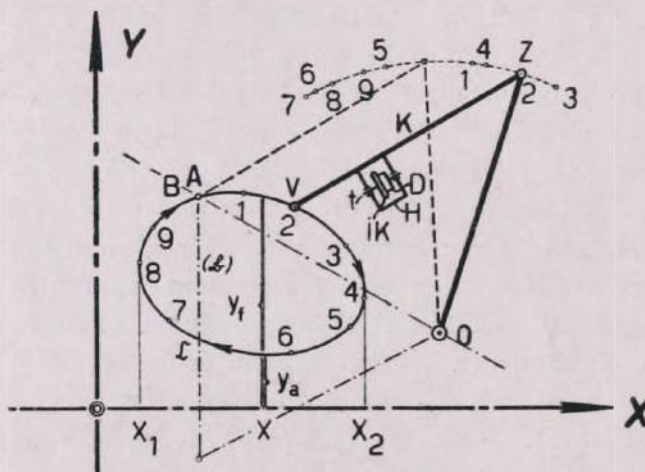
A következőkben a gyakorlati matematika számoló műszereinek egy speciális fejezetéről, az ú. n. integráló műszerekről szeretnék szemelvényes áttekintést nyújtani. A matematikai műszerek célszerű felhasználása az alkalmazott matematikának szinte összes kérdéseinél — amelyeknél a probléma megoldása a tényleges számérték konkrét meghatározásával fejeződik be — mind fontosabbá és nélkülözhetetlenebbé válik. Az alkalmazott matematikai megfontolások a finommechanika fejlődő technikájával karöltve mindinkább utat és módot keresnek arra, hogy bonyolult és fárasztó számítások bizonyos, gyakorlatilag sokszor megisméltendő típusát művi úton végezzék el. A sokszor megisméltendő egytípusú feladat elvégzésének gondolatban és figyelemben mechanikus (és ezért fárasztó) szellemi robotjától mentesülünk, ha sikerül a megfelelő műszer matematikai elvére és finommechanikai kivitelére egyszeri (és nagyon is alkotó) szellemi munka árán megoldást találnunk. E műszerek célszerű és főleg átfogó alkalmazása, valamint a fellépő hibahatárok becslése¹ szükségszerűen feltételezi e műszerek elvi alapjainak és konstruktív kivitelezési formáinak ismeretét. Ezek az ismeretek a gyakorlati matematika módszereinek egy részét alkotják.

A gyakorlati matematika (nem tévesztendő össze az alkalmazott matematika sokkal átfogóbb egységével) a matematikának az az ága, amely a legkülönbözőbb matematikai műveletekkel már egyértelműen determinált elméleti eredménynek, a konkrét számértékig terjedő tényleges meghatározásával foglalkozik. H. v. SANDEN a gyakorlati matematikát igen jellemzően «die mathematische Exekutive»-nek nevezi.

Amennyiben természettudományi vizsgálatok a matematikai analízis módszereivel egyáltalán értelmesen tárgyalhatók (erre a fizika és elméleti technika legkifejlettebb példa, a kémia már kevésbé, biológia, orvostudomány és rokonszakok pedig a kezdet formáin is még alig jutottak túl), az elméletből származó eredmények integrálok,

¹ E dolgozat keretében nem bocsátkozunk bele az integráló műszerek hibavizsgálatának a kiegyenlítő számítás alapján való tárgyalásába. Szabad legyen itt a meglevő igen kiterjedt irodalomra utalnunk, amely az Archiv für technisches Messenben (A. T. M. Berichte) F. A. WILLERS-nek szisztematikus összeállításában megjelent közleményei alapján könnyen megtalálható. Ezenkívül irodalmi utalásként lásd: MEYER ZUR CAPELLEN, Mathematische Instrumente (Akad. Vlg., Leipzig 1941) c. összefoglaló modern könyvét.

differentiál- és integrálegyenletek, sorok, egyenletrendszerek stb. alakjában adódnak. Ha az elméletből származtatott eredmények numerikus értékeit is meg akarjuk határozni,² akkor az integrálokat ki kell számítani, a differentiál- és integrálegyenleteket meg kell oldani, a sorok által definiált függvények tabelláit fel kell állítani stb. Ezen feladatok kiszámításának (vagy általánosabban: a célszerű számítás módszereinek) elméletét és gyakorlatát tárgyalja a gyakorlati matematika. Módszereit általában numerikus és grafikus részre szokás bontani. Mindkét irány módszerének meg van a jellemző előnye és hátránya. A konkrét problémához igazodó megoldási módszerek célszerű kombinációinak felismerése, vagy e módszerek megalkotása



I. ábra.

jellemzi az alkalmazott matematikust.

Mind a numerikus, mind a grafikus megoldásnak nélkülözhetetlen segédeszközei a matematikai műszerek. Ilyenek (hogy csak egy-néhányat említsünk) a legegyszerűbb logarléc és addiátortól kezdve a teljes automata számológépig; egyenletrendszerek megoldására, egyszerű vagy

összetett függvényi összefüggések előállítására szolgáló kinematikai, elektromos, vagy más fizikai elvet felhasználó műszerek; szerkesztések megkönnyítésére, vagy elvégzésére szolgáló geometriai műszerek; differenciálegyenletek megoldására szerkesztett berendezések, amelyek a technikai nehézségek kiküszöbölésében valóban bámulatraméltóak.³

Ebben a dolgozatban csak az integrálszámítás egyes feladatait elvégző műszerekkel foglalkozunk, tehát olyanokkal, melyek lényegében felszín meghatározására szolgálnak.

E műszerek működési elve a következő. Ha a műszer K integráló karjának V vezetett pontját (I. ábra) a \mathcal{B} tartomány \mathcal{C} határgörbéje

² Nem felesleges talán az a megjegyzés, hogy épp ezeknek a számértékeknek a fizikai világnképünk jelenségeihez való hozzárendelése (tehát ezen értékeknek eo ipso konkrét ismerete) jellemzi lényegesen mai civilizációnkat, — sőt talán kultúránkat is.

³ Modern államszervezet hitelgazdaság és előállító ipar nélkül nem képzelhető el. Mindkettőnek racionális munkájához a matematikai műszer (legátfogóbb értelemben) nélkülözhetetlen. A tudományos megismerés ideálisabb követelményeiről nem is szólva. Csodálatos, hogy ily alapelemeket nálunk a köztudat mennyire elhanyagol.

mentén a tetszőleges A kezdőponttól a $B (= A)$ végpontig végig-
vezetjük (ezt nevezzük lekörözésnek), akkor az

$$F = \iint_{(\mathfrak{B})} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_a(x)}^{y_t(x)} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} (y_t(x) - y_a(x)) dx = \oint_{(\mathfrak{C})} y(x) dx$$

értékével arányos számot a műszeren leolvashatjuk. Ez a szám a
műszer egy célszerű beosztású D tárcsával ellátott, ú. n. integráló
kerékén (IK) mért kezdeti és végleolvasás (elméletileg pontos) külön-
bsége. E műveletet nevezzük planimetrálásnak. A műszer kivitele az
 $I = \oint f(y(x)) dx$ integrál értékének meghatározására általánosítható.

Ha az integráló kerék tárcsáján a leolvasási különbség a meg-
határozandó integrál értékével csak akkor arányos, ha a V vezetett
pontnak A kezdő- és B véghelyzete egy mellékfeltételnek (pl. $A = B$,
vagy A ordinátája = B ordinátájával stb.) eleget kell tegyen: plani-
meterekről beszélünk. Ha tetszőleges B végpont esetében a leolvasás

különbsége $I(x) = \int_a^x f(y(x)) dx$ értékével minden ily mellékfeltétel

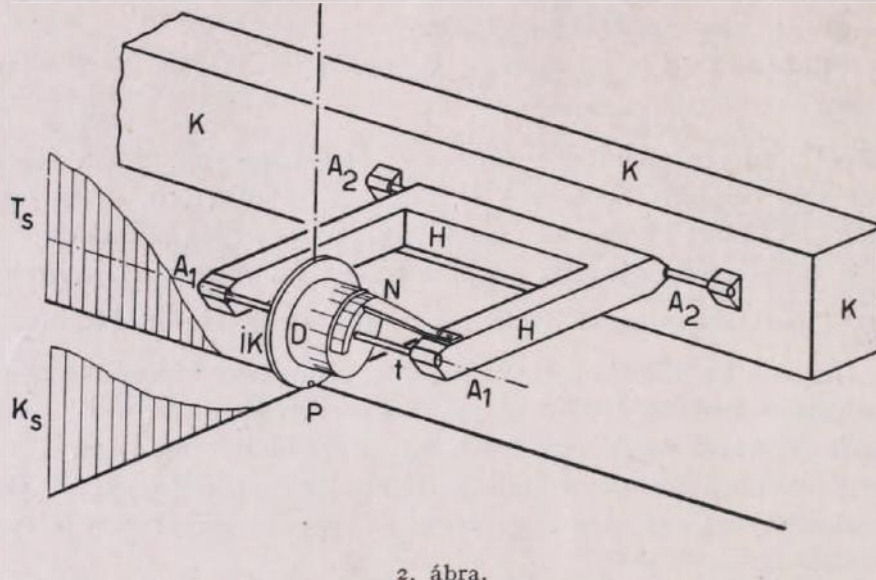
nélkül arányos: integrimeternek hívjuk műszerünket. Mindkét eset-
ben a meghatározandó integrálérték a leolvasás különbségének nume-
rikus értékével arányos. Célszerű az arányossági tényezőt esetről esetre,
a gyártól megadott állandók figyelmen kívül hagyásával, egy a szá-
mításra alkalmas egyszerű idom (pl. négyzet, vagy körlap) plani-
metrálásával meghatározni.

Ha műszerünk a integrál értékét fel is rajzolja, akkor integráf
a neve. Szűkebb értelemben ezek már nem planimetriai integráló
műszerek, hanem differenciálegyenletek megoldására szerkesztett
készülékek.

1. **Az integráló kerék és működése.** Már az előbbiből kitűnik,
hogy a planimeterek és integrimeterek elméletileg legfontosabb kon-
struktív egysége az ú. n. integráló kerék (a továbbiakban IK -nak
rövidítve). Ennek működését, bármily egyszerű elveken is alapuljon
az, a továbbiak teljes átértése céljából részletesen ismertetjük.

A 2. ábrán látható elvi elrendezésben az IK . A K integráló
kar A_2 csapágy- és tengelyén nyugszik a H keret. Ennek A_1A_1 csap-
ágyaiban van a t tengellyel ágyazva az IK , s a vele szilárdul össze-
kötött, leolvasást szolgáló D tárcsa. Ezen elrendezés következtében
az integráló kerék H , IK , D és t önsúlyának G eredőjével nyugszik
a P pontban az alap xy -síkján. A D tárcsa egyenletes beosztásának
és a vele szemben álló H kerethez rögzített N nóniusznak segítségével
az IK pillanatnyi állását (a változó kivitel szerint 4 . . . 5 számjegyig
terjedő pontossággal) le lehet olvasni. Az IK kivitelének és a t tengely-

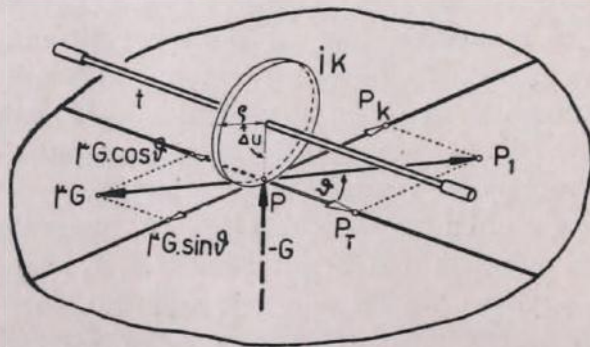
ágyazás beállításának olyannak kell lennie, hogy a kerék K_s síkja és a tengely T_s síkja egymásra és az alap xy -síkjára párosával merő-



2. ábra.

leges legyen. Úgyszintén, hogy az IK P «érintési pontja» e három síknak közös pontja legyen.

Ha az IK -et $\overline{PP_1}$ eltolásnak vetjük alá (ez eltolást a P érintési pont «gördülési útjának» nevezzük), miközben a t tengelyt eredeti irányához párhuzamosan vezetjük (3. ábra), akkor az IK -re ható $-G$ reakciós erő az eltolás irányával szemben működő μG surlódási erőt kelti. Ennek a kerék síkjába eső komponense a tengely ágyazási ellenállásával szemben létrehozza az IK gördülését. Természetesen feltételezzük (s ez a valódi kivétel egyik nehézsége), hogy az ágyazási



3. ábra.

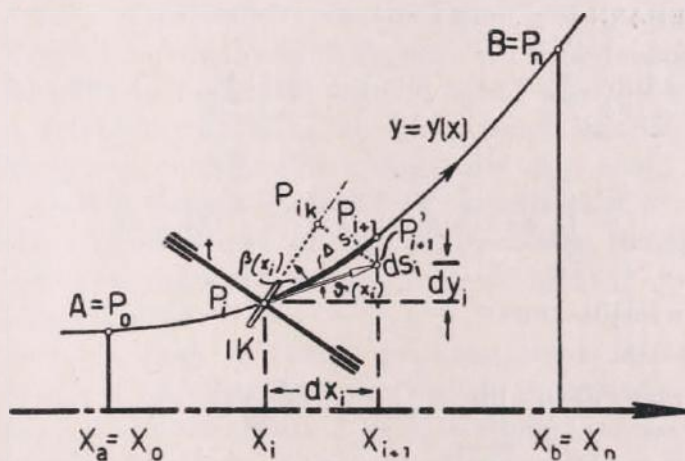
ellenállás olyan kicsiny, hogy az IK tengelysíkjának nyomvonalától eltérő legkisebb elmozdulásakor is a surlódási erőnek a kerék síkjába eső nyomatéka legyőzi az ágyazásnak az ellenállását. Feltételezzük tehát, hogy az IK a kerék síkjában csúszásmentesen gördül.

Mivel minden eltolás tetszőleges komponensek összegére bontható, a $\overline{PP_1}$ eltolást felbontjuk a $\overline{PP_K}$ és $\overline{PP_T}$ komponensre. Az utóbbi elmozdulásnál támadó surlódás ereje a tengely síkjába hat, tehát nem ad gördülési nyo-

matékok, az előbbi elmozdulás surlódási ereje a kerék síkjában támad, s az IK -nek ezen gördülési útkomponenssel azonos $|\overline{PP}_K| = \rho \Delta u = \Delta h$ elforgatását (gördülését) eredményezi. Tekintettel arra, hogy az IK -el összekötött D tárcsa beosztása arányos a teljeszög szögbeosztásával, a gördülés Δu szöge arányos a beosztás kezdeti (U_1) és végleolvasásának (U_2) különbségével, azaz

$1 \dots \Delta u = C (U_2 - U_1)$ és ebből $|\overline{PP}_K| = \rho C \Delta u = k \Delta U = \Delta h$.

Vezessük most az IK P érintési pontját egy megadott $y = y(x)$ görbe mentén a kezdeti $A = P_0$ ponttól a $B = P_n$ végpontig úgy, hogy közben a kerék síkjának nyomvonala a görbe érintőjével megadott $\beta(x)$ szöget zárjon be (4. ábra) és határozzuk meg az IK ezen eltolásához (gördülési útjához) tartozó Δh gördülését.



4. ábra.

E célból vegyünk fel az x_a és x_b között egy tetszőleges intervallumfelosztás $x_i \dots x_{i+1} = x_i + dx_i$ ($i = 0 \dots n - 1$) részintervallumát. Ha a P pontot P_i -től P_{i+1} -ig a görbe Δs_i íve mentén vezetjük végig az ehhez tartozó exact gördülés $\Delta h_i = \Delta s_i \cos \bar{\beta}_i$, ahol $s(x)$ a görbe ívhosszát, $\Delta s_i = s(x + dx_i) - s(x_i)$ és $\bar{\beta}_i = \beta(x_i + \vartheta_i dx_i)$, ($0 \leq \vartheta_i \leq 1$) a $\beta(x)$ szögnek ehhez az intervallumhoz tartozó megfelelő középvértékét jelöli. Ha a P pontot P_i -től P_{i+1}' -ig a görbe ds_i íveleme mentén vezetjük, az ehhez tartozó gördülés $dh_i = ds_i \cos \beta(x_i)$, mivel az elmozdulás $\overline{P_i P_{i+1}'} = \overline{P_i P_{i,K}} + \overline{P_{i,K} P_{i+1}'}$ elmozdulások összegére bontható. Ezek közül az első dh_i , a második nulla gördülést eredményez. A középvértéktétel szerint⁴ $\Delta s_i = ds_i + \psi_1(x_i, dx_i) dx_i^2$, úgyszintén

⁴ A középvértéktétel alkalmazhatóságának feltételei, épúgy, mint a RIEMANN-féle integrálhatóságának legalább szakaszonként gyakorlatilag mindig érvényesek.

$$\cos \beta_i = \cos \beta(x_i) + \psi_2(x_i, dx_i) dx_i$$

s ebből $\Delta h_i = \Delta s_i \cos \beta_i =$

$$= ds_i \cos \beta(x_i) + \psi(x_i, dx_i) dx_i^2 = dh_i + \psi(x_i, dx_i) dx_i^2.$$

Az A -tól B -ig való gördülés ezek szerint

$$h \Big|_A^B = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta h_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(ds_i \cos \beta(x_i) + \psi(x_i, dx_i) dx_i^2 \right),$$

ahol $\sum_{i=0}^{n-1} \psi(x_i, dx_i) dx_i^2$ a gördülés azon különbségét jelöli, amely fel-
lép, ha gördülési útként a tényleges ívet, ill. az ívelemek összegét
vesszük. Ez az egyenlet minden dx_i felosztásra, s így az $n \rightarrow \infty$ és
 $dx_i \rightarrow 0$ határértékében is érvényes marad, s ebből a határozott
integrál RIEMANN-féle definíciójának értelmében a

$$\begin{aligned} h \Big|_A^B &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ dx_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} ds_i \cos \beta(x_i) + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ dx_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi(x_i, dx_i) dx_i^2 = \\ &= \int_{x_a}^{x_b} ds \cos \beta(x) + R \equiv \int_{x_a}^{x_b} \cos \beta ds \end{aligned}$$

egyenletet nyerjük, mert

$$|R| \leq \lim_{dx_i \rightarrow 0} (\max |dx_i|) \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ dx_i \rightarrow 0}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \psi(x_i, dx_i) dx_i \right| = 0 \cdot \left| \int_{x_a}^{x_b} \psi(x, 0) dx \right| = 0.$$

2... $h \Big|_A^B = \Delta h = \int_A^B \cos \beta ds$ egyenlet a planiméterek műkö-

désének alapegyenlete⁵, amely kimondja, hogy a P érintési pont gör-
dülési útjának íveleméből és a kerék síkjának ezen ívelemmel bezárt
szög cosinusának szorzatából képezett vonalment integrál egyenlő
az IK gördülésével.

Ezen az alapon az egyes planiméterkivitelek működésének alap-
egyenleteit a következőképpen nyerhetjük. A K integráló kar V vezet-
tett pontját a megadott integrálandó görbe ds íveleme mentén
elmozdítjuk. A K karnak egy meghatározott másik Z «vezérlő pontja»

⁵ Közönséges differenciálegyenletek megoldására szerkesztett modern gépek egy-
része lényegében szintén az IK gördülésének ezen egyenletét használják fel. Az IK
gördülése azonban ezeknél kapcsolt kinematikai műveket kell a h függvénye szerint
vezéreljen. Ehhez szükséges a gördülést előidéző igen kicsiny nyomatéknak 6000...
8000-szeres minden praktikus torzítástól és rezgéstől mentes (!) megerősítése. Nem
csoda, hogy eddig csak egynéhány ilyen nagyobb gép létezik, éspedig tudtommal Oslo,
Manchester, Cambridge (U. S. A.), Leningrad, Belfast-ban.

kinematikai kényszervezérléssel mozog egy konstruktíve előírt pálya ds , megfelelő ívelemén, amelyet az integrálandó görbe változójának (pl. τ -nak) függvényeként meghatározhatunk. A P és Z pont ezen elmozdulásából meghatározható a P érintési pont gördülési útjának $ds(\tau)$ íveleme és a kerék síkjának $\beta(\tau)$ szöge. Az IK ezen differenciális elmozdulásához tartozó differenciális gördülése $dh = \cos \beta(\tau) ds(\tau)$. Ha V -t az A ponttól ($\tau = \tau_a$) a B pontig ($\tau = \tau_b$) vezetjük, az IK rezultáns gördülése

$$\Delta h = \int_{\tau_a}^{\tau_b} dh = \int_{\tau_a}^{\tau_b} f(\tau) d\tau.$$

A Z pont vezérlésének célszerű megválasztásával elérhető, hogy az IK gördülése a legkülönbözőbb típusú $f(\tau)$ függvény integráljainak értékét mérje.

E tárgyalási mód akkor célszerű, ha az elmozdulási utakat analitikusan explicite ismerjük, vagy pedig, ha a fellépő elmozdulások egyszerűen áttekinthetők (pl. a lineáris planimeteknél). A második esetben lényegesen megkönnyíti a tárgyalást az a tény, hogy elmozdulások és a nekik megfelelő gördülések vizsgálatakor a valódi elmozdulás mindig helyettesíthető az ú. n. differenciális (tehát linearizált) elmozdulással, ha utána a magasabb fokú hibákat megsemmisítő integráció következik.

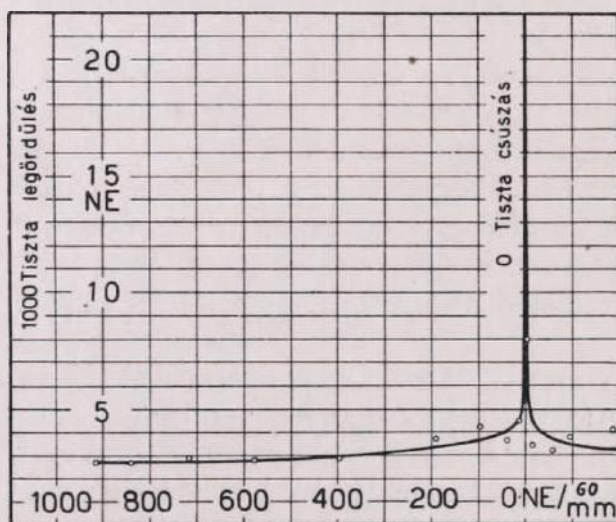
Természetes, hogy a vizsgált folyamat egyes fázisainak véges⁶ differenciálokra való felbontásakor a valódi (kontinuált) folyamattal szemben általában hibát követünk el. Ezt a hibát azonban a rákövetkező integráció kiküszöböli, s így vizsgálódásunk a valódi folyamat pontos képés adja, ha csak arra ügyelünk, hogy a fellépő összes lineáris differenciálokkal egybekötött behatásokat mind figyelembe vegyünk.

Sok esetben az elmozdulások vizsgálata szabatos fogalmazásban bonyolult (pl. az ú. n. poláris planimeteknél). Ily esetekben célszerű a 4. alatt röviden ismertetett tisztán analitikai megfontolás útját követni.

Bármely tárgyalásnak azonban alapja az 1. és 2. egyenlet. Ezeknek érvényessége szükségszerűen feltételezi a μ surlódási együtt-ható állandóságát, valamint az xy , K_s , T_s síkoknak az IK pontos művi kivitelével és beállításával való megvalósítását, mivel a ΔU leolvasási különbség k arányossági tényezője ezeknek függvénye. Ez az arányossági tényező (kicsiny, de jól észlelhető határok között) változik aszerint, hogy az IK mily minőségű alapon és hányszor görbül végig azonos úton. Természetes, hogy csúszásmentes gördülés

⁶ Pl. R. ROTHE. Höhere Mathematik. Teubner, Berlin.

($\beta = 0$) alkalmával a véletlen hibák hatása az eredményre lényegesen kisebb, mint akkor, amikor a kerék csak csúszik, de nem gördül ($\beta = \pi/2$). Az 5. ábrán feltüntetjük BAER nyomán⁷ egy-egy ötvenes művileg exaktul vezetett mérési sorozat nóniusz egységekben megadott szórását, mint az *IK* 60 mm-es úton való gördülésének (nóniusz-egységekben mért) függvényét. 1000 NE/60 mm csúszásmentes gördülést, 0 NE/60 mm gördülésmentes csúszást jelez. Ebből az ábrából látható, hogy a gördülésmentes csúszás (tehát $\beta = \pi/2$) közvetlen szomszédságának kivételével az *IK* gördülése meglepően állandó. A szórás középértékben 3, maximum 4 nóniuszegység. Ha a mérés ismétlésekor (s ez minden esetben szükséges) ennél nagyobb eltérés is fellép, akkor azt (a kiegyenlítőszámítás terminológiájával) egyszeri



5. ábra.

szisztematikus hibának tulajdoníthatjuk. Ebben az esetben a többitől lényegesen eltérő mérést újra kell elvégezni. A μ surlódási tényező növelésére az *IK* peremét finoman érdessé teszik. Emiatt az ellentett irányú körfutások arányossági tényezője is egymástól kissé különböző lehet. Az *IK* peremének kézzel való érintése az utána idővel szükség-szerűen beálló rozsdásodás miatt legszigorúbban elkerülendő, mivel az érintett helyen μ értékei ugrásszerűen megváltoznak. Ugyanebből az okból óvni kell műszerünket attól, hogy planimetrálás közben az *IK* az alapsík két különböző (papír) lapjáról le-, vagy lapjára felgördüljön, nem is szólva természetesen arról, hogy megfelelő alátétlap nélkül való planimetrálás a műszer eredeti precizitását szinte pillanatok alatt végérvényesen tönkre teheti.

2. A Harvey-féle harmonikus analizátor. Ez a műszer jó példa az integráló kerék gördülésére levezetett 2. egyenlet alkalmazására.

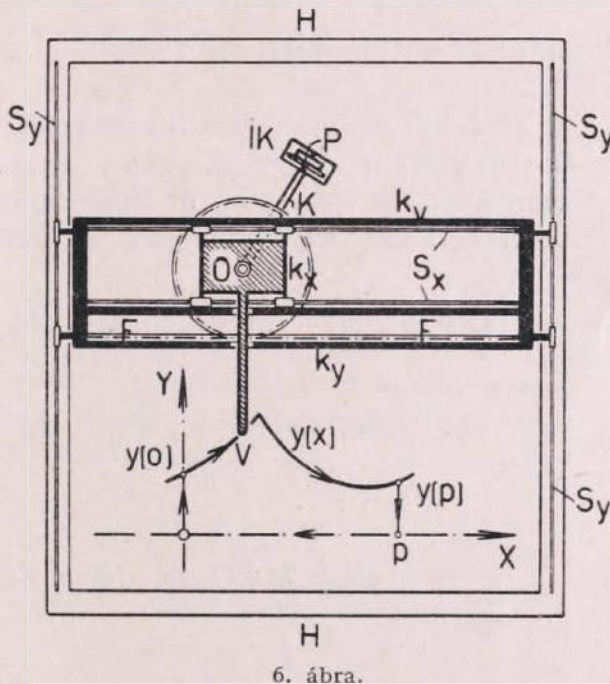
Legyen $y(x)$ az analizálandó függvény. p jelölje e függvény primitív periodusát. A függvény F o u r i e r együtthatóinak egyenlete

⁷ Ztschr. f. Instr.-Kunde. (1937, 5. füzet, 177. oldal.)

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{p} \int_0^p y(x) \begin{cases} \cos \left(\frac{2\pi n}{p} x \right) \\ \sin \left(\frac{2\pi n}{p} x \right) \end{cases} dx.$$

Célunk a megadott $y(x)$ függvényből ezeknek az integráloknak művi kiszámítása. Ezt a következő mechanikai rendszerrel érhetjük el (6. ábra).

Egy H kereten az S_y sín pár az y -iránnyal párhuzamosan vezeti a k_y kocsi és ezzel a kocsival összekötött S_x sín pár pedig az x -iránnyal párhuzamosan vezeti a k_x integráló kocsi. Az integráló kocsi egy vele szilárdul összekötött OV vezető kar segítségével a keret síkjában, tehát szabadon eltolható. A k_x kocsi O (függőleges) tengelyén egy R sugarú fogaskerék van elhelyezve. Ez a fogaskerék a k_y kocsival szilárdan összekötött F fogasrúdba kapcsolódik. A fogaskerék egy radiális K karral van összekötve, amely az IK integráló kereket hordozza. Az IK a P pontban nyugszik az alapsíkon, tengelye OP egyenessel egybeesik, $|\overline{OP}| = l$ és $|\overline{VO}| = m$.



6. ábra.

Ezen elrendezés következtében, ha a vezető kar V végpontját egy az x -tengellyel párhuzamos egyenes mentén vezetjük, akkor a P pont az ordináta irányában m -mel eltolt cikloist írja le, ha V -t az y -tengellyel párhuzamosan mozgatjuk, akkor P is az y -tengellyel párhuzamos egyenest ír le. A fogaskerék sugarát válasszuk meg úgy, hogy a fogaskerék (s vele a K kar is) a p periodushosszon n teljes körforgást végezzen, tehát $2R\pi n = p$ legyen. Ha a dx elmozdulásnak a fogaskerék (ill. K kar) $d\varphi$ szögelfordulása felel meg,

akkor $dx = R d\varphi$, azaz $\varphi = \frac{2\pi n}{p} x + \varphi_0$, ahol φ_0 a K kar kezdeti

($x \Leftarrow 0$ -hoz tartozó) szögbeállítását jelöli. Ha a vezető kar V végpontját az analizálandó görbe mentén $x = 0$ -tól $x = p$ -ig vezetjük, akkor a P pont gördülési útjának egyenlete

$$x_p = x + l \cos \left(\frac{2\pi n}{p} x + \varphi_0 \right),$$

$$y_p = y(x) + m + l \sin \left(\frac{2\pi n}{p} x + \varphi_0 \right).$$

$$\text{Ezen az úton az } IK \text{ a } k \Delta U = \int_{x=0}^p \cos \beta \, ds_p = \int_{x=0}^p \sin \delta \, ds_p,$$

integrál értékét méri, ha $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$ az integráló kerék tengelyének

a gördülési út ívelemével bezárt szögét jelöli. Mivel ez az ívelem az x -tengellyel ϑ szöget alkot, s a tengely iránya megegyezik a kar irányával, azért $\varphi = \vartheta + \delta$. Eszerint és az x_p, y_p függvények szerint az integrálban fellépő kifejezéseket explicite meg tudjuk adni:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy_p}{dx_p}, \quad \sin \delta = \sin(\varphi - \vartheta) = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}} =$$

$$= \frac{\sin \varphi \, dx_p - \cos \varphi \, dy_p}{\sqrt{dx_p^2 + dy_p^2}} = \frac{\sin \varphi \, dx_p - \cos \varphi \, dy_p}{ds_p},$$

$$\text{tehát } k \Delta U_1 = \int_{x=0}^p (\sin \varphi \, dx_p - \cos \varphi \, dy_p) =$$

$$= - \int_{x=0}^p \left(l \frac{d\varphi}{dx} + \cos \varphi \frac{dy}{dx} - \sin \varphi \right) dx.$$

Ha ebből az egyenletből a Fourier együtthatókat akarjuk lemérni, legelőbb is az első és harmadik tagot kell az integrálból kiküszöböl-nünk. Épp azok a tagok lépnek fel azonban akkor, amikor a V pontot az x -tengelyen ($y = 0$) $x = p$ -től $x = 0$ -ig visszavezetjük. Ebben az esetben az IK gördülése

$$k \Delta U_2 = - \int_{x=p}^0 \left(l \frac{d\varphi}{dx} - \sin \varphi \right) dx.$$

Mivel $\frac{\sin}{\cos} \varphi(0) = \frac{\sin}{\cos} \varphi(p)$, azért K iránya mindkét végállapotban

azonos és mivel $y(0) = y(p)$, azért az IK gördülése az $x = p$ ordináta-

egyenesen az $y(\phi)$ -től az o -ig történő eltolás közben szintén ellentétten egyenlő az ordinátatengelyen o -tól $y(o)$ -ig való eltolás közben végzett gördüléssel. A függvény periodusának a V ponttól való teljes kör-futásával eszerint az IK

$$\begin{aligned}
 k \Delta U &= k (\Delta U_1 + \Delta U_2) = - \int_{x=0}^{\phi} \cos \varphi \frac{dy}{dx} dx = \\
 &= - y(x) \cos \varphi(x) \Big|_{x=0}^{\phi} - \int_{x=0}^{\phi} y(x) \sin \varphi(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \\
 &= - \frac{2\pi n}{\phi} \int_{x=0}^{\phi} y(x) \sin \left(\frac{2\pi n}{\phi} x + \varphi_0 \right) dx
 \end{aligned}$$

integrál értékét határozza meg.

Ha a F o u r i e r együtthatók integráljait akarjuk mérni, akkor a kar kezdeti helyzetét az x - ($\varphi_0 = 0$), ill. az y -tengellyel párhuzamosan ($\varphi_0 = \pi/2$) vesszük fel. Eszerint tehát

$$\pm k \cdot \begin{cases} \Delta U_0 \\ \Delta U_{\pi/2} \end{cases} = \pi n \cdot \begin{cases} \phi \\ \phi \end{cases} \cdot \begin{cases} y(x) \\ y(x) \end{cases} \begin{cases} \sin \left(\frac{2\pi n}{\phi} x \right) \\ \cos \left(\frac{2\pi n}{\phi} x \right) \end{cases} dx = \pi n \begin{cases} b_n \\ a_n \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} = \frac{\pm k}{\pi n} \cdot \begin{cases} \Delta U_{\pi/2} \\ \Delta U_0 \end{cases}$$

Ezzel a F o u r i e r együtthatókat a leolvasási különbség értéke és a k műszerállandó meghatározza.

A k műszerállandót azáltal nyerjük, hogy egy oly függvényt analizálunk, amelynek F o u r i e r együtthatói numerikusan ismertek (pl. trapez, vagy félkörívекből összetett görbét). A műszer úgy van elkészítve, hogy az $n = 1, 2, 3 \dots$ értékeknek megfelelő,

K kart vezérlő $R_n = \frac{\phi}{2\pi n}$ fogaskerek a k_x kocsin kicserélhetők.

Minden fogaskerék K kezdeti beállítása szerint két együtthatót határoz meg. ϕ a műszer állandója. Ha ettől a ϕ értéktől eltérő periodusú függvényt akarunk analizálni, szükséges, hogy a függvényt a ϕ állandó periodushosszára átrajzoljuk.

3. A lineáris planiméterek. Lineárisnak nevezzük planimeterünket, ha az integráló kart vezérlő Z pont⁸ kényszervezérléssel egy egyenes mentén mozog. E vezérlésnek három gyakorlatilag jól bevált formája használatos: 1. A csúszószegecs vonalzós vezérlés-t az jellemzi, hogy a K kar Z pontján rögzített csúszószegecs bele nyúlik egy fémvonalzó kimart egyenesvonalú csatornájába és ebben elmozdulhat, 2. a vonalzós kocsi vezérlés a fémvonalzó csatornájába két konikusan élezett peremű kereken nyugvó kocsi-val egybekötött kar segítségével a kocsi mozgásirányával párhuzamosan vezeti a Z pontot, 3. a hengerkeres kocsi vezérlés-nél a kocsi (s vele az összekötött Z pont) egyenesvonalú elmozdulását a kocsi hordozó két szélesperemű, érdes és egymással szilárdul összekötött hengerkeres biztosítja.

A 7. ábra egy vonalzós kocsi vezérlésű lineáris felületplaniméter vázlatát, valamint a V és P pont elmozdulásának differenciáljait ábrázolja.

Szemléljük először a V pont ds mentén való $V \rightarrow V'$ elmozdulását. Ez az elmozdulás felbontható 1. a K karnak dx eltolására (az eltolás alatt a karnak az x -tengellyel bezárt α szöge nem változik), 2. egy olyan dx_1 eltolásra, amelynek nagyságát úgy válasszuk meg, hogy K vezetett pontja, 3. a Z ($x + dx + dx_1$) pont körül $d\alpha$ -val való elforgatással ds -nek V' végpontjába jusson. Ezalatt az elforgatás alatt a V vezetett pont az $l d\alpha$, P pedig a $p d\alpha$ differenciált írja le. Eszerint

$$V \rightarrow V' = \overline{dx} + \overline{dx_1} + \overline{l d\alpha}.$$

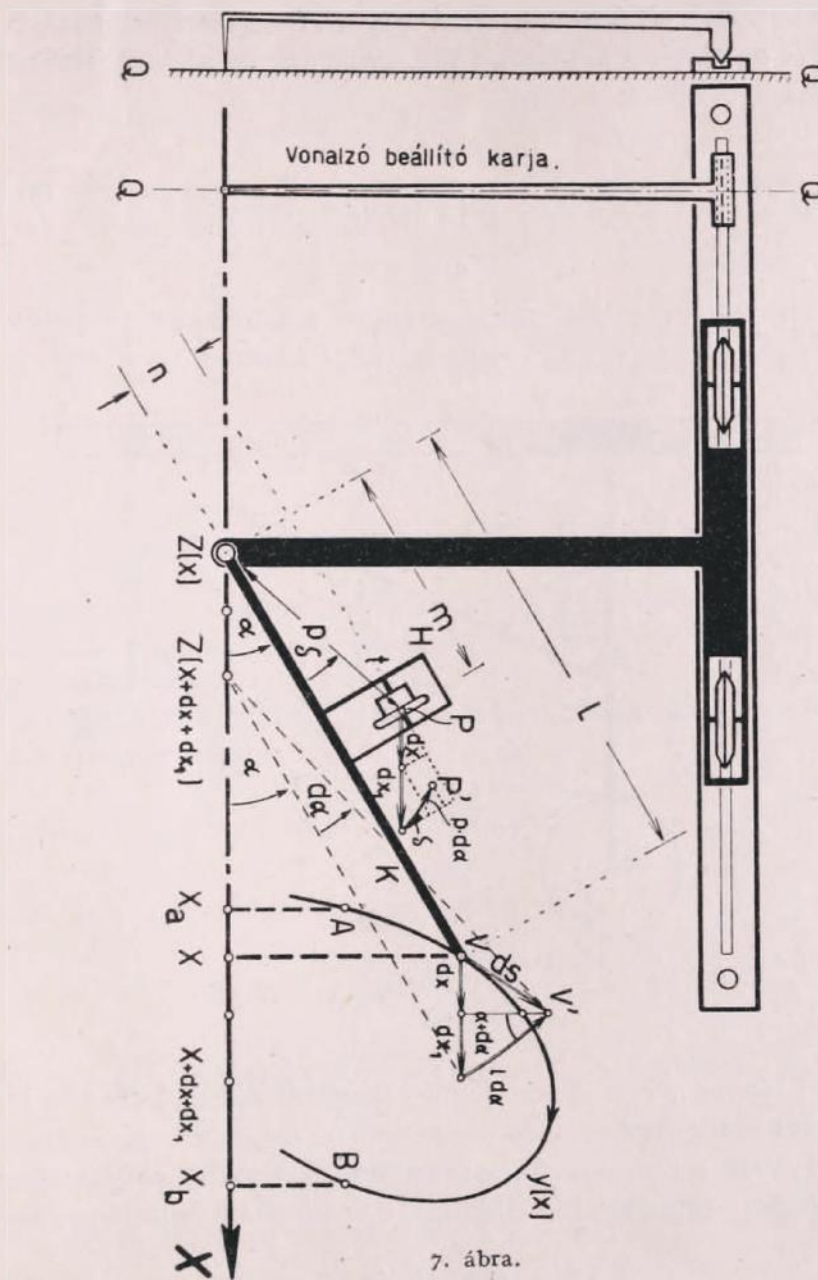
Az IK P érintési pontjának megfelelő elmozdulása (a gördülési út differenciáljai)

$$P \rightarrow P' = \overline{dx} + \overline{dx_1} + \overline{p d\alpha},$$

s így az IK gördülése $P \rightarrow P'$ mentén $dh_{res} = dh + dh_1 + dh_2$, ahol $dh = dx \sin \alpha$, $dh_1 = dx_1 \sin \alpha$, $dh_2 = -p \cos \delta d\alpha = -m d\alpha$. Mivel $dx_1 = l d\alpha \sin \alpha$, azért a rezultáns differenciális gördülés

$$dh_{res} = \sin \alpha dx + l \sin^2 \alpha d\alpha - m d\alpha.$$

⁸ A továbbiakban általában a következő jelöléseket használjuk. K jelöli az integráló kart, amelyhez az IK integráló kerék H keret segítségével van erősítve. K egyik végén helyezkedik el a görbe mentén való vezetésre kiképzett V vezetett pont, a másikon az integráló kart vezérlő Z pont, amely kinematikai kényszervezérléssel meghatározott görbe mentén mozog. \overline{VZ} párhuzamos az IK t tengelyéhez, s mindkettő minden helyzetben párhuzamos az alapsíkkal. $|\overline{VZ}| = l$, $|\overline{ZP}| = p$, ahol P az IK -nek az alapsíkkal való érintéspontját jelöli. \overline{ZP} -nek a \overline{ZV} -re való párhuzamos vetülete m , a \overline{ZV} -re való merőleges vetülete pedig n , tehát $\operatorname{tg} \delta = \frac{n}{m}$, $\cos \delta = \frac{m}{p}$.



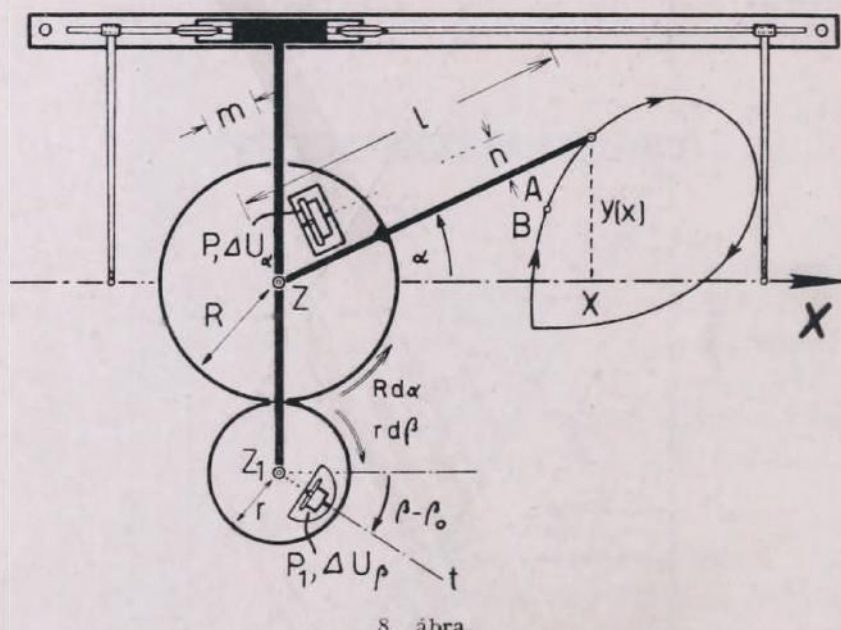
Ha V -t a görbe mentén P' -től P'' -ig vezetjük, a gördülés

$$\begin{aligned}
 3 \dots \quad h \Big|_{P'}^{P''} &= k \Delta U = \int_{P'}^{P''} dh_{cs} = \\
 &= \int_{P'}^{P''} \sin \alpha \, dx + \left\{ \frac{l}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - m \alpha \right\} \Big|_{P'}^{P''}.
 \end{aligned}$$

Ha a kezdeti A pont ordinátája egyenlő a B végpont ordinátájával, akkor $\alpha_A = \alpha_B$ lévén a két utolsó tag, mint azonos alsó és felső határ értékkülönbsége, kiesik és így

$$k U \Big|_A^B = k \Delta U = \int_{x_A}^{x_B} \sin \alpha \, dx = \frac{I}{l} \int_{x_A}^{x_B} y(x) \, dx \quad \text{mivel } \sin \alpha = \frac{y(x)}{l}.$$

A ΔU leolvasási különbség tehát arányos a görbe, az x -tengely és az A és B pontokhoz tartozó ordináta által határolt területtel. A kl



8. ábra.

arányossági tényezőt egy ismert felület (négyzet, körlap) planimetrlásával határozzuk meg.

Ha az IK t tengelye az x -tengellyel $\beta = \beta(\alpha)$ szöget alkot, akkor, amikor az integráló kar a szöget, úgy könnyen belátható, hogy

$$4 \dots \quad k \Delta U = \oint \sin \beta(\alpha) \, dx$$

egyenlet érvényes.⁹ Ez az egyszerű elv az alapja a lineáris nyomték-planimetereknek.

⁹ Azokban az esetekben, amelyekben az elmozdulások felbontása az előbbivel azonos, nem tüntetem fel az összes útelemekeket és a hozzájuk tartozó gördülési differenciálokat, csupán a lényeges gördülési differenciált adom meg, mert az előbbieken alapján könnyen meghatározhatjuk azokat, amelyeknek integráljai zárt körútás esetében úgyis eltűnnek.

Állítsuk pl. a $\beta = \beta(a)$ szögátvitelt a 8. ábrán vázolt R és r sugarú fogaskerék áttétellel elő,¹⁰ akkor $Rda = rd\beta$, azaz

$$\beta(a) = \frac{R}{r} a + \beta(0).$$

Ha a R/r áttételi viszonyt és a t tengely $\beta(0)$ kezdeti szögét az alábbiak szerint választjuk:

$\frac{R}{r}$	$\beta(0)$	$\sin \beta(a)$
1	0	$\sin a$
2	$-\pi/2$	$\sin(2a - \pi/2) = 2 \sin^2 a - 1$
3	0	$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
4	$+\pi/2$	$\sin(4a + \pi/2) = 8 \sin^4 a - 8 \sin^2 a + 1$

akkor a felsorolt egyszerű trigonometriai átalakítások és a 4. egyenlet, valamint $y(x) = l \sin a$ összefüggés segítségével könnyen belátható, hogy az egyes integráló kerek leolvasási különbsége az $y(x)$ zárt görbe által határolt felület nyomatókintegráljaival a következő egyenletek szerint fejezhető ki:

$$k_1 \Delta U_1 = \frac{1}{l} \oint y(x) dx = \frac{1}{l} \iint dx dy$$

$$k_2 \Delta U_2 = \frac{2}{l^2} \oint y^2(x) dx = \frac{4}{l^2} \iint y dx dy$$

$$k_3 \Delta U_3 = \frac{3}{l} \oint y(x) dx - \frac{4}{l^3} \oint y^3(x) dx = \frac{3}{l} \iint dx dy - \frac{12}{l^3} \iint y^2 dx dy$$

$$k_4 \Delta U_4 = \frac{8}{l^4} \oint y^4(x) dx - \frac{8}{l^2} \oint y^2(x) dx = \frac{32}{l^4} \iint y^3 dx dy - \frac{16}{l^2} \iint y dx dy.$$

Ebből a nyomatók (a leolvasási különbségekkel) kifejezve a következő egyenleteket szolgáltatják:

$$F = M_{0,0} = \iint dx dy = lk_1 \Delta U_1 = a \Delta U_1$$

$$5 \dots S_x = M_{0,1} = \iint y dx dy = \frac{l^2 k_2}{4} \Delta U_2 = b \Delta U_2$$

$$T_x = M_{1,2} = \iint y^2 dx dy = \frac{l^3}{4} \left(k_1 \Delta U_1 - \frac{k_3}{3} \Delta U_3 \right) = c_1 \Delta U_1 - c_2 \Delta U_3$$

$$M_{0,3} = \iint y^3 dx dy = \frac{l^4}{32} \left(k_4 \Delta U_4 - \frac{k_2}{4} \Delta U_2 \right) = d_1 \Delta U_4 - d_2 \Delta U_2.$$

¹⁰ A. AMSLER; fogaskerékáttétellel és az IK gömbön való precíziós gördítésével: G. Coradi; csúszósvezérlésű csuklós áttétellel: A. Ott.

Ha a műszer Z pontjának útjaként az y -tengelyt választjuk, akkor az előbbi $M_{i,k}$ nyomatékok helyett nyilvánvalóan az $M_{i,0}$ nyomatékok értékét nyerjük. Egy ponton átmenő $i+k+r$ különböző irányú tengelyekre vonatkoztatott $M_{0,i+k}$ nyomatékok meghatározása után az $M_{i,k} = \iint x^i y^k dx dy$ nyomatékok értékeit számítással szintén könnyen meghatározhatjuk. Megemlítendő, hogy míg az első két nyomaték arányossági tényezője egy ismert nyomatékú felület planimetrálása útján adódik, addig a két utolsó nyomaték planimeter-egyenlete két arányossági tényezőt tartalmaz, s így meghatározásuk két ismert nyomatékú felület planimetrálásával kell megtörténjen.

Tekintettel arra, hogy egy mérés egyszeri leolvasásának értéke nagy mértékben függ a V pontot vezető kéz és szem gyakorlatától és a pillanatnyi diszpozíciótól, a hibaforrások lehető csökkentésére a planimetrálás minden esetében többszöri körfutás leolvasásainak (esetleg a kiegyenlítő számítás alapján nyert) középértéke veendő.

Meg kell említenünk még azt a gyakorlatilag sokszor megfigyelhető (és csak kivételesen helyes) kezelési elvet, amely szerint a planimetrálandó görbéről véletlenül letérő téves vezetést, akaratlagos ellentett letéréssel igyekszik kiegyenlíteni. Ez felszínmeghatározásnál helyes. Tényleges nyomatékok planimetrálásánál viszont általában hibás eredményekhez vezet, amennyiben a tengelytől különböző távolságban elhelyezkedő egybevágó terület nyomatékai különbözőek.

A lineáris nyomatékplanimeterek alapelve az α szög többszörösének művi áttétele az IK t tengelyére. Természetes, hogy az IK tengely irányának ezen vezérlését a fogaskerekekkel megvalósított szögátvitel helyett más kinematikai vezérléssel is megoldhatjuk.

A 9. ábra szemlélteti pl. A. OTT egyesített és gyakorlatilag jól bevált $\oint y^2 dx$, $\oint y dx$, $\oint \sqrt{y} dx$ hatványplanimeterének elvét.

A párhuzamos vezérlés kocsijának Z_1Z_2 tengelypontjain V_1Z_1Q és V_2Z_2Q integráló karok vannak megerősítve, s ezek egymáshoz a Q csúszóágazással kapcsolódnak. Mivel konstruktíve $|Z_1Z_2| = |Z_2Q|$, azért a Z_1Z_2Q háromszög Z_2 -nél fellépő külső szöge a Z_1 -nél fellépő α belső szögnek kétszerese. Ha a V_1 pontot a Z_1 és Z_2 pontokon átmenő x_1 abszcisszatengelyre vonatkoztatott $y_1(x_1)$ görbén vezetjük, az IK_1 integráló kerék a

$$k_1 \Delta U_1 = \oint \sin \alpha dx_1 = \frac{1}{l} \oint y_1(x_1) dx_1,$$

felületet, az IK_2 pedig a

$$k_2 \Delta U_2 = - \oint \cos 2\alpha dx_1 = \oint (2 \sin^2 \alpha - 1) dx_1 = \frac{2}{l^2} \oint y_1^2(x_1) dx_1,$$

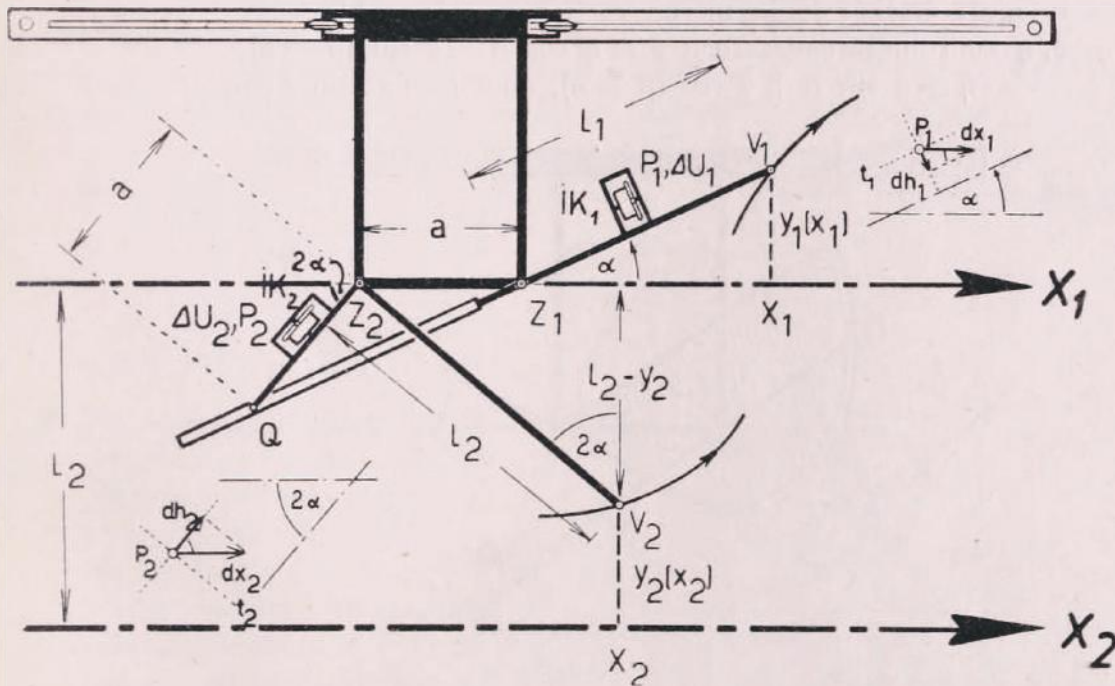
statikus nyomatékot méri. (Eközben V_2 pont egy oly görbét ír le,

amelynek ordinátája az x_1 -től l_2 távolságban lévő x_2 -tengelyre vonatkoztatva $y_2 = 2 \frac{l_2}{l_1^2} y_1^2$.)

Ha a V_2 ponttal az x_2 abszcisszára vonatkoztatott $y_2(x_2)$ görbét követjük, akkor az IK_2 a

$$k_2 \Delta U_2 = -\oint \cos 2\alpha dx_2 = -\frac{I}{l_2} \oint (l_2 - y_2(x_2)) dx_2 = \frac{I}{l_2} \oint y_2(x_2) dx_2$$

felületet méri, mivel, mint az a 9. ábrából könnyen leolvasható,



9. ábra.

$l_2 - y_2(x_2) = l_2 \cos 2\alpha$. Az IK_1 integráló kerék viszont a

$$k_1 \Delta U_1 = \oint \sin \alpha dx_2 = \oint \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} dx_2 = \frac{I}{\sqrt{2} l_2} \oint y_2(x_2) dx_2$$

integrál értékét határozza meg.

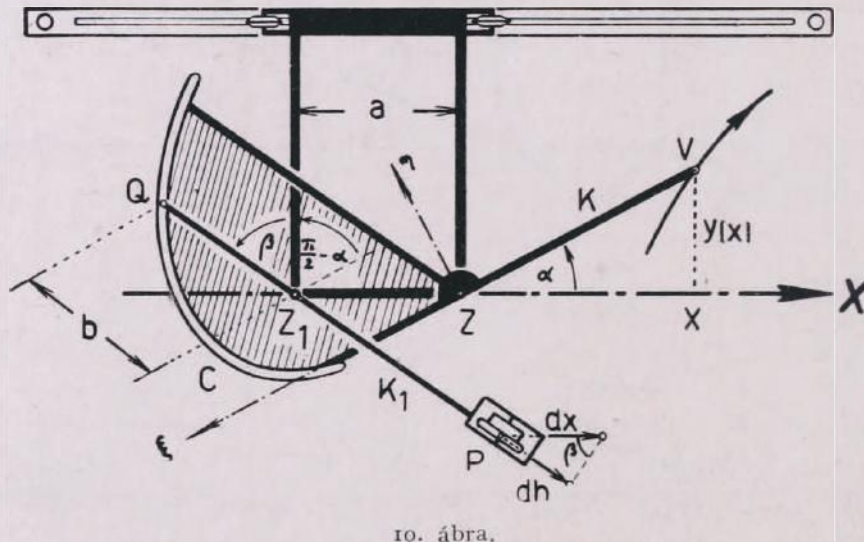
Felsőbbrendű nyomatók planimetrálásakor az eddig ismertett planiméterek közös hibája az, hogy a keresett eredményt az 5. egyenletekkel két vagy több (hibás) megfigyelési eredményből, t. i. a leolvasási különbségekből kell kiszámítanunk. A mérési technikában (a hibaátöröklés miatt) lehetőleg elkerülünk oly műszereket, melyek nem szolgáltatják közvetlenül a keresett értékeket, hanem közvetve csak oly értékeket adnak meg, amelyekből a keresett érték további számítással határozandó meg. Ezt a nehézséget és a precíziós

kivitelben költséges fogaskerékátvételt A. OTT egy igen egyszerű ötlettel küszöböli ki (10. ábra). A Z körül forgó K integráló kar egy (a rajzban sraffozott) kulisszával van egybekötve. E kulisszának meghatározott alakban kivágott C csatornájába a Z_1 körül forgó és az integráló kereket hordozó K_1 kar Q csúszószege nyúlik be. $|Z_1Q| = b$, $|ZZ_1| = a$. V -nek dx elmozdulásakor az IK gördülése $dh = dx \cdot \sin \beta$. Ha a C csatornát $\sin \beta = f(\sin \alpha)$ egyenlet szerint készítjük el, akkor az IK

$$k \Delta U = \dot{\phi} f(\sin \alpha) dx = \dot{\phi} f\left(\frac{y(x)}{l}\right) dx$$

integrál értékét fogja mérni. A C egyenlete a kulisszával kapcsolt ξ, η koordinátarendszerben $\xi = a \cos \alpha - b \sin(\beta - \alpha)$,

$$\eta = a \sin \alpha + b \cos(\beta - \alpha), \text{ ahol } \beta = \arcsin f(\sin \alpha).$$



10. ábra.

Ez a kivitel tudtommal jelenleg a legáltalánosabb planimeter szerkesztésének elvi lehetőségét adja meg, hiszen minden olyan f függvény integrációjára alkalmazható, amelyhez rendelt C görbéiv kinematikailag egyértelmű és az elmozdulások folyamán nem idéz elő kinematikai önzárolást. Konstruktív kivitelben is teljesen kifogástalan az ez alapon szerkesztett A. OTT-féle négytárcsás $n y o m a t é k p l a n i m e t e r$, valamint a már ismertetett gyökplanimeter.

Az ú. n. precíziós planimeterek a leolvasás pontosságát a gördülési út művi sokszorosításával növelik. Ezeknél az IK a műszerhez tartozó tárcsán, vagy gömbfelületen gördül. Ezzel (a technikai kivitel lehetőségein belül) kiküszöbölik az alapsík egyenletlenségéből származó hibákat, megmarad azonban az IK gördülésmentes csúszásakor fellépő aránylag nagy szórás lehetősége. Ha az IK helyett gömbön csúszásmentesen gördülő hengert veszünk integráló mechanizmus-

ként, akkor ez utóbbi hibaforrás is gyakorlatilag kiküszöbölhető. A tárcsás gördülő planimeter egy hengerkeres kocsiból áll (II. ábra), amelyen a VZP integráló kar a Z függőleges tengely körül elfordulhat. Az IK a kocsi O pontjában függőleges tengely körül ágyazott T tárcsán nyugszik. E tárcsa az F fogaskerékáttétellel kapcsolódik a hengerkerék tengelyéhez, úgyhogy a kocsi dx elmozdulása a tárcsa arányos $v dx = d\varphi$ elfordulását idézi elő.

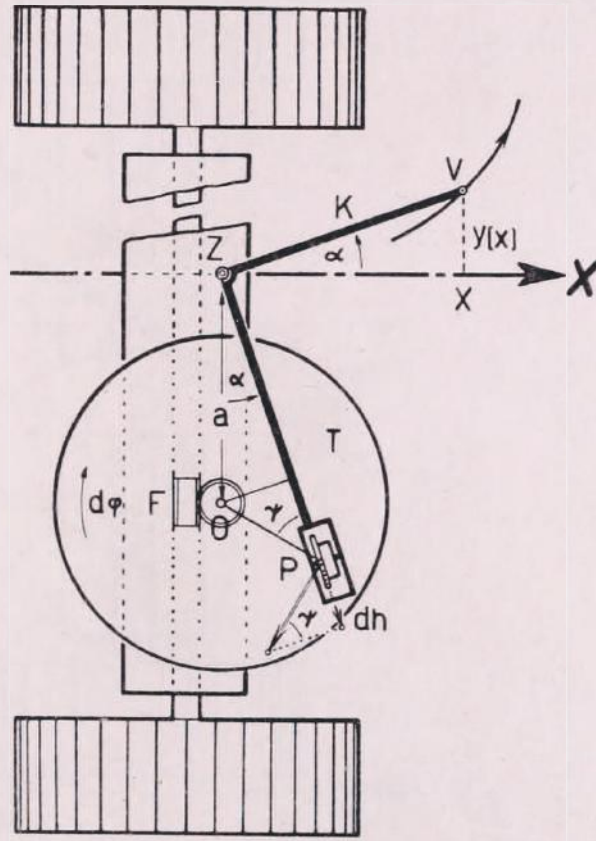
A V pont dx elmozdulása tehát az IKP érintési pontjának $|\overline{OP}| d\varphi$ relatív elmozdulását eredményezi, amelyhez $dh = \sin \psi |\overline{OP}| d\varphi$ gördülés tartozik. A ZOP háromszögből

$$|\overline{OP}| \sin \psi = |\overline{ZO}| \sin \alpha = a \sin \alpha \text{ tehát } k \Delta U = \oint a \sin \alpha d\varphi = \frac{av}{l} \oint y(x) dx.$$

Ha a sík tárcsát egy gömbfelülettel, s az integráló kereket e gömbfelületet érintő hengerrel helyettesítjük, akkor ez a planimeter az IK gördülésmentes csúszásának hibáját is kiküszöböli, amennyiben ez az integrálómechanizmus minden mozgásállapotban csúszásmentesgördülést végez.

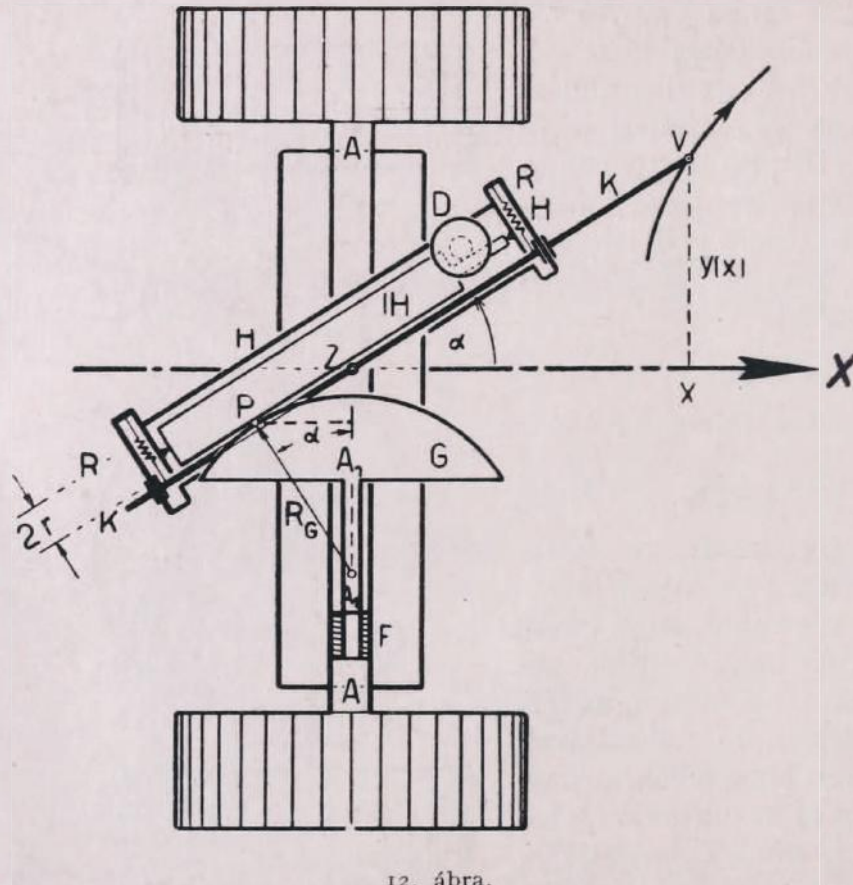
Ilyen pl. a hengerkeres gömbplanimeter (12. ábra), amely egy hengerkeres vezérlésű kocsiból áll, melyen a G gömbsüveg az A_1A_1 vízszintes tengely mentén van ágyazva. Az A_1A_1 tengely az F fogaskerékáttétellel kapcsolódik a henger kerék vele párhuzamos AA tengelyéhez. A gömbsüvegnek az A_1A_1 tengely körül való $d\varphi$ szögmozdulása tehát arányos a kocsi, s így a V vezetett pont dx elmozdulásával.

A Z pontban ágyazott K integráló karral egy H keret van egybekötve, amelyen a ZV -vel párhuzamos tengely mentén ágyazva helyezkedik el az IH integráló henger. Ennek szögmozdulását egy D dob beosztása és egy nónius regisztrálja. Az IH integráló henger és a



II. ábra.

G gömbfelület a gömbfelület vízszintes főkörének P pontjában érinti egymást, a H keret csúszós ágyazása és az R rúgók segítségével. A V pont dx elmozdulásánál G $v dx = d\varphi$ szöggel fordul el, a P pontnak az A_1A_1 tengelyre vonatkoztatott relatív elfordulása tehát $R_G \sin \alpha d\varphi$. Ha az IH átmérője $2r$, akkor az IH G -nek ezen elmoz-



dulásakor $d\varphi$ szöggel fordul el, vagyis $R_G \sin \alpha d\varphi = r d\varphi$. Ebből következik, hogy

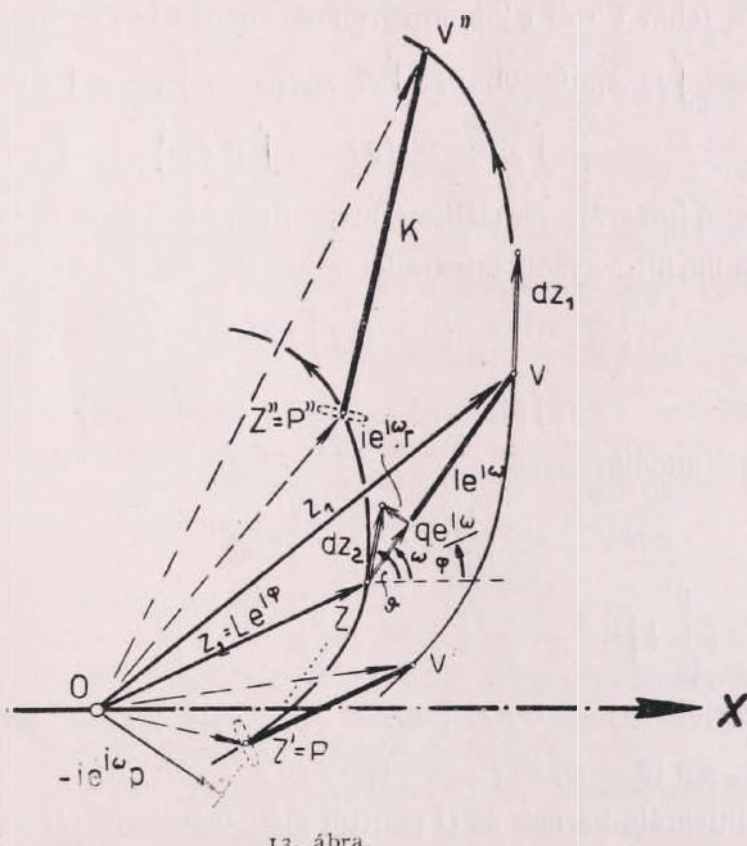
$$k \Delta U = \frac{R_G \cdot r}{r} \oint \sin \alpha dx = \frac{R_G \cdot r}{r \cdot l} \oint y(x) dx.$$

Ugyanezen az elven alapszik *Coradi* precíziós nyomatékplanimetre. Ez a kivitel azonban integráló henger helyett a gömböt érintő integráló kerekeket használ.

4. Az általános planiméteregyenlet. Az általános planiméterek a Z vezérlő pontot mozgása közben egy meghatározott $z_2 = L e^{i\varphi}$ pályán tartják, miközben a V vezetett ponttal a megadott és integrá-

landó $z_1 = z_2 + l e^{i\omega}$ pályát követjük. (13. ábra) L és l a póluskar, ill. az integráló kar (változó) hosszát, φ , ω e karoknak az x -tengellyel bezárt szögét jelöli. Ha $\varphi = 0$, l állandó és L változó, akkor a már tárgyalt lineáris planimétereket nyerjük. Ha L és l állandó és φ változó, akkor Z az ú. n. póluskörön mozog (e kör középpontját nevezzük a pólusnak), s planiméterünket poláris planiméternek hívjuk. Ha z_2 görbe ponttá zsugorodik és l változó, akkor a radiális planiméterek határesetét nyerjük.

Az általános esetben az integráló kar Z és V pontja kinematikai-



13. ábra.

lag kapcsolja a z_1 és z_2 görbét. Ebben az esetben az integráló kar elmozdulásával fellépő elmozdulási és gördülési differenciálok célszerű felbontása általában komplikáltabb az előbb ismertetteknél. Célszerűbb emiatt az általános planiméteregyenletet más úton, t. i. a kinematikailag kapcsolt z_1 és z_2 görbék szektorfelületei között fennálló összefüggésből levezetni.

Ha V -t a megadott z_1 görbe mentén V' -től V'' -ig vezetjük (13. ábra), akkor Z a pólusgörbén Z' -től Z'' -ig tolódik el. Jelölje F_1 az $OV'V''$, F_2 az $OZ'Z''$ szektorfelületet. A LEIBNIZ-féle szektorképlet

komplex alakban $F = -Im \int z d\bar{z}$, ahol z az integrálandó síkgörbe¹¹ komplex egyenletét jelöli. Eszerint, mivel

$$d\bar{z}_1 = d\bar{z}_2 + e^{-i\omega} dl - il e^{-i\omega} d\omega, \quad d\bar{z}_2 = e^{-i\varphi} dL - iL e^{-i\varphi} d\varphi,$$

azért

$$\begin{aligned} z_1 d\bar{z}_1 - z_2 d\bar{z}_2 &= z_2 (e^{-i\omega} dl - il e^{i\omega} d\omega) + l e^{i\omega} d\bar{z}_2 + l dl - il^2 d\omega = \\ &= ilL e^{i(\varphi-\omega)} d(\varphi-\omega) - ilL [e^{i(\varphi-\omega)} + e^{-i(\varphi-\omega)}] d\varphi + \\ &\quad + L dl e^{i(\varphi-\omega)} + l dL e^{-i(\varphi-\omega)} - il^2 d\omega + l dl. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ha tehát } V' \text{-től } V'' \text{-ig integrálunk, akkor } 2(F_1 - F_2) \Big|_{V'}^{V''} = \\ = -Im \left\{ \int lL d(e^{i(\varphi-\omega)}) - 2i \int lL \cos(\varphi-\omega) d\varphi + \int e^{i(\varphi-\omega)} L dl + \right. \\ \left. + \int e^{-i(\varphi-\omega)} l dL - i \int l^2 d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Ha az első integrált parciálisan integráljuk, s a fellépő új integrálokat a harmadik, ill. negyedik integrállal egyesítjük, akkor a $2(F_1 - F_2) \Big|_{V'}^{V''} =$

$$\begin{aligned} = -Im \left\{ lL e^{i(\varphi-\omega)} \Big|_{V'}^{V''} - \int l [e^{i(\varphi-\omega)} - e^{-i(\varphi-\omega)}] dL - \right. \\ \left. - 2i \int lL \cos(\varphi-\omega) d\varphi - i \int l^2 d\omega \right\} \end{aligned}$$

egyenlet adódik, azaz

$$\begin{aligned} 2(F_1 - F_2) \Big|_{V'}^{V''} = -Im \left\{ lL e^{i(\varphi-\omega)} \Big|_{V'}^{V''} - \right. \\ \left. - 2i \int_{V'}^{V''} l [\sin(\varphi-\omega) dL + L \cos(\varphi-\omega) d\varphi] - i \int_{V'}^{V''} l^2 d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Mivel $dz_2 = e^{i\varphi} dL + iL e^{i\varphi} d\varphi = q e^{i\omega} + r i e^{i\omega}$, azért

$$ds_2 \sin(\vartheta - \omega) = r = \sin(\varphi - \omega) dL + L \cos(\varphi - \omega) d\varphi.$$

Ha az integráló karnak az O ponttól mért merőleges távolságát p -vel jelöljük, akkor $L e^{i\varphi} + \lambda e^{i\omega} = -p i e^{i\omega}$, tehát $Im \{L e^{i(\varphi-\omega)}\} =$

$$= Im \{-\lambda - ip\} = -p.$$

Ezzel fenti egyenletünk az

$$6 \dots (F_1 - F_2) \Big|_{V'}^{V''} = \frac{1}{2} lp \Big|_{V'}^{V''} + \int_{V'}^{V''} l \sin(\vartheta - \omega) ds_2 + \frac{1}{2} \int_{V'}^{V''} l^2 d\omega$$

¹¹ Gömbön, vagy tetszőleges görbületű felületeken határolt területek meghatározására is ismeretesek exakt, vagy csak közelítő működésű planiméterek.

alakot ölti. Ezt az egyenletet nevezzük az általános planiméteregyenletnek. Ha az integráló kereket úgy helyezzük el a K karon, hogy az IK -nak az alapsíkkal való P érintési pontja a Z pont vetületébe essék (tehát P a z_2 pólusgörbén mozogjon), miközben az IK tengelye K -val párhuzamos, akkor az IK differenciális elmozdulása

$$dh = \sin(\vartheta - \omega) ds_2 = k dU$$

differenciális gördülést méri.

Ha az IK -et a fentiek szerint helyezzük el és ha L és l állandó (poláris planiméter), akkor a 6. egyenlet az

$$7 \dots (F_1 - F_2) \Big|_{V'}^{V''} = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \Big|_{V'}^{V''} + \frac{1}{2} l^2 \omega \Big|_{V'}^{V''} + lk \Delta U$$

egyenletbe megy át.

V teljes körfutása esetében $F_2 = \begin{cases} L^2 \pi \\ 0 \end{cases}$, aszerint, amint a pólus a mért felületen kívül van, mivel az első esetben a póluskar a póluskör szektorfelületét kétszer ellentett irányban írja le. Mindkét esetben teljes körfelületét egyszer azonos F_1 az integrálandó F területtel azonos. Ha a pólus F -en belül helyezkedik el, akkor ez természetes, ha a pólus F -en kívül fekszik, akkor a kétszer ellentett előjellel fellépő szektorfelületek összege épp F . Teljes körfutás esetében azonkívül $\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_B$, $\omega_A = \omega_B$, tehát

$$8 \dots F = l \dot{\varphi} \sin(\vartheta - \omega) ds_2 + \begin{cases} L^2 \pi \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} lk \Delta U \\ lk \Delta U + C \end{cases}$$

Eszerint az állandók meghatározásához két független planimetrálás szükséges, ha a pólus F -en belül fekszik, az ellenkező esetben egy ismert felület planimetrálásával kapjuk lk értékét.

Szerkezetileg nehézségeket okozna az IK P érintési pontjának Z vetületébe való elhelyezése. Az IK tényleges elhelyezése a K karon olyan, hogy P (m, n) távolságban fekszik a Z ponttól (pl. 7. ábra). A megadott görbe teljes befutása esetében ez az eltolás azonban nem játszik szerepet. Ezt a 14. ábrából könnyen leolvashatjuk. C_2 jelöli a pólusgörbét, C_1 az integrálandó görbét. Legyen $\overline{VV'}$ a C_1 görbén V differenciális elmozdulása. Ennek a pólusgörbén $\overline{ZZ'}$ elmozdulás felel meg. Ez utóbbit felbonthatjuk $\overline{ds_2} = \overline{dh} + \overline{dg}$ elmozdulásokra, s ezzel az integráló kar elmozdulását a $\overline{ZV} \rightarrow \overline{Z_1V_1}$, $\overline{Z_1V_1} \rightarrow \overline{Z'V_2}$, $\overline{Z'V_2} \rightarrow \overline{Z'V'}$ elmozdulásokra, amelyeknek az IK

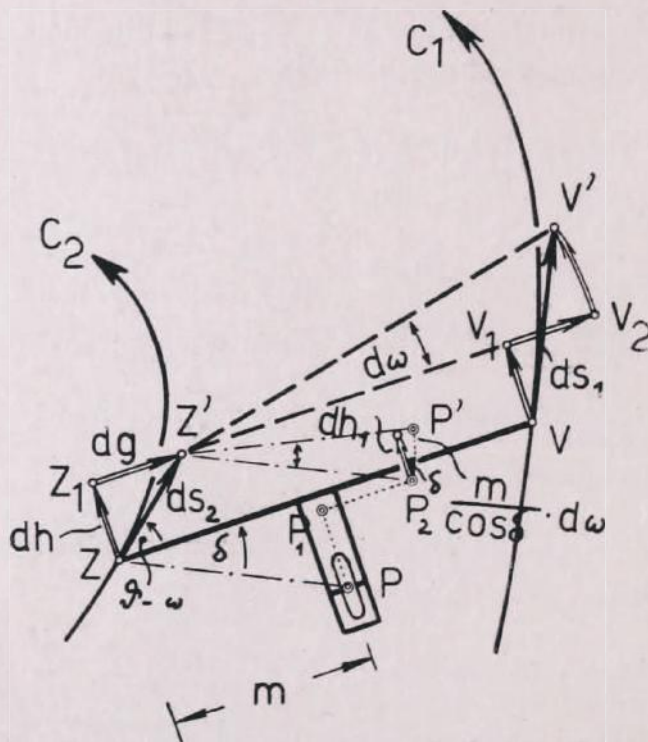
$dh, o, dh_1 = \left(\frac{m}{\cos \delta} d\omega \right) \cos \delta$ gördülései felelnek meg. Az (m, n) -el eltolt

IK -nak $\overline{ZV} \rightarrow \overline{Z'V'}$ -hez tartozó rezultáns gördülése tehát

$$dh_{res} = kdU = dh + o + md\omega = \sin(\vartheta - \omega) ds_2 + m d\omega.$$

V teljes körfutása esetében a második tag integrálja kiesik, s újból az előbbi egyszerű planiméteregyenletet nyerjük.

Lényegesen fontos és a poláris planiméterek elterjedéséhez nagyban hozzájárult az a (jelenleg) gyakorlatilag igen ritkán kihasznált tény, hogy ezekkel a planiméterekkel az ú. n. kompenzációs kivitelben az IK tengelyének



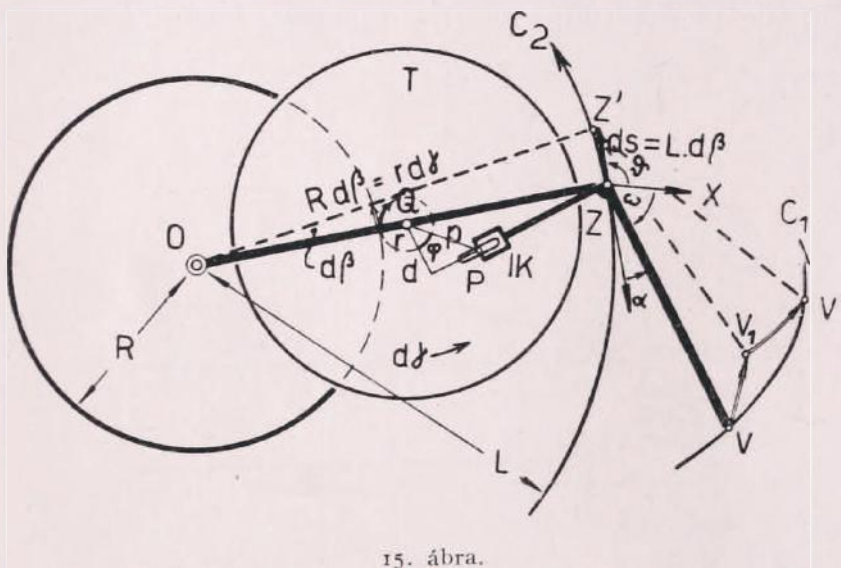
14. ábra.

«bal» oldalán fekszik) az IK tengelyének a K karral bezárt szögferdesége $+\varepsilon$, a másik beállításnál (a planiméter az OA egyenes «jobb» oldalán fekszik) e tengelyferdeség $-\varepsilon$. E két kezdeti helyzetből kiinduló két planimetrálás középértékéről könnyű kimutatni, hogy a hibátlan (tehát tengelyferdeség nélküli) leolvasási értéktől ε -nek csak négyzetes és magasabbrendű tagjaival arányosan különbözik, míg az egyes leolvasások hibája ε -nek első hatványával arányos. Annak ellenére, hogy ε kicsiny, ε első hatványa még befolyásolhatja a mérési eredményt, a második hatvány általában már nem. A két szimmetrikus beállításra vonatkozó mérés középértéke tehát gyakorlatilag a gyári beállítás ezen hibájától mentes.

A közönséges poláris planiméterrel szemben kb. tízszeres pontosságú az ú. n. tárcsás poláris planiméter. Ennek kivitele

ben az IK tengelyének K -hoz viszonyított esetleges ferdeségéből (tehát a gyári beállítás kis határokon belül szinte elkerülhetetlen hibájából) származó hibás értékadatoknak igen egyszerű hibakompensációja lehetséges. A kompenzációs planimétert a pólusrögzítés változtatása nélkül lehet a pólus és a planimetrálás A kezdeti pontját összekötő egyeneshez ennek mindkét oldalán szimmetrikusan felállítani (1. ábra), s vagy az egyik, vagy a másik kezdeti helyzetből kiindulva planimetrálni. Az első beállításnál (a planiméter pl. OA egyenes

természetesen kissé komplikáltabb (15. ábra). A rögzített O pólus körül forog az OZ póluskar és ehhez a Z pontban függőleges ágyazással kapcsolódik a VZP integráló kar. Az IK a T tárcsán nyugszik, e tárcsa viszont a póluskaron megerősített Q függőleges tengely körül forog. A T tárcsával szilárdul van egybekötve az r sugarú érdes peremű kerék, amely a pólusalaphoz rögzített R sugarú kerék szintén érdes peremével surlódás által csúszásmentesen kapcsolódik. Eszerint OZ $d\beta$ szögeltmozdulásának a T tárcsa Q középpont körüli $d\gamma$ relatív szögeltmozdulása felel meg és $Rd\beta = rd\gamma$. Z pont pályája az L sugarú póluskör, amelynek íveleme $ds_2 = Ld\beta$. Ha V az integráló C_1 görbén $\overline{VV'}$ elmozdulásnak lesz alávetve, akkor ez az



15. ábra.

elmozdulás felbontható 1. $\overline{VV_1}$ elmozdulásra, amelyben az OZV rendszer mint szilárd egész fordul el O körül, és 2. $\overline{V_1V'}$ elmozdulásra, amelyben OZ' marad nyugalomban és $Z'V_1$ Z' körül da szöggel fordul át a $Z'V'$ helyzetbe. E második elmozduláskor az IK görbülete nulla, mivel P pályája a K síkra merőleges. Az első elmozduláskor viszont az IK görbülete

$$dh = \rho \cos \varphi d\gamma = d\gamma \cdot d = d \cdot \frac{R}{r} d\beta = \frac{d \cdot R}{r \cdot L} ds_2.$$

Mivel $d = [L - (R + r)] \sin \alpha$, azért $dh = \frac{R}{rL} (L - R - r) \sin \alpha ds_2$.

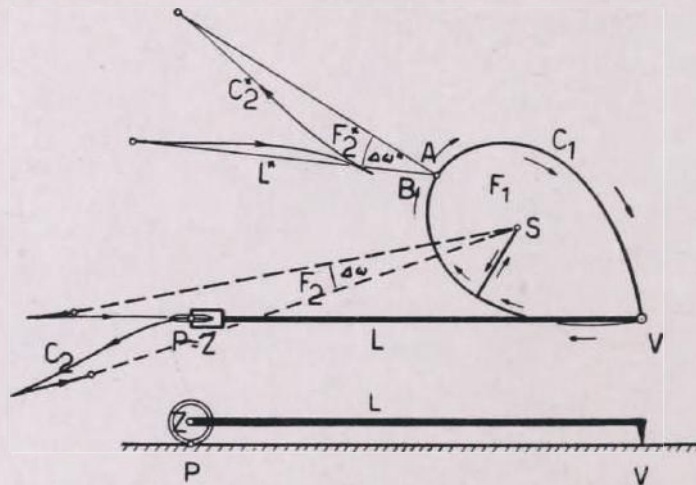
Tekintettel arra, hogy $\vartheta - \omega = \pi - \alpha$, azért $\sin \alpha = \sin (\vartheta - \omega)$,

azaz $dh = kdU = \frac{R}{rL} (L - R - r) \sin (\vartheta - \omega) ds_2$, tehát teljes kör-

futás esetében $F = F_2 + k \frac{rL}{R(L-R-r)} \Delta U = F_2 + K \Delta U$.

(F_2 szerepe ugyanaz, mint a közönséges poláris planimétereknél.)

A 7. planiméteregyenletből könnyen származtatható az integráló kerék nélkül működő PRITZ-féle planiméter. Ez gyakorlatilag alig ér el 2...4% pontosságot, s emiatt inkább csak elvileg érdekes. E planiméter csak az integráló karból áll (16. ábra), amelynek Z pontjában egy éles peremű nehéz kerék úgy van megerősítve, hogy a kerék síkja az alapsíkra merőleges és a ZV egyenesbe esik. A P pont tehát csakis ZV irányában mozdulhat el, P a V -vel körülfutott C_1 görbéhez és l vonzó távolsághoz tartozó C_2 vonzó görbét írja le. Ha a körfutás kezdeti A pontját koordinátarendszerünk



16. ábra.

kezdőpontjának válasszuk, akkor teljes körfutás után $\phi_A = \phi_B = 0$. Mivel a C_2 pólusgörbe érintőinek iránya minden helyzetben megegyezik az integráló kar irányával, vagyis $\vartheta \equiv \omega$, azért (l. 7. és 8. egyenlet) $F_1 = F_2 + \frac{1}{2} l \omega \Big|_B^A$, ahol F_1 a körülfutott görbével, F_2 a pólusgörbével (t. i. C_1 vonzógörbéjével) határolt tartomány területét jelent. l , $\omega_A \neq \omega_B$ értékeit a kezdeti és végállapot megjelölésével könnyen meghatározhatjuk. Eddig a pontig planiméterünk működési egyenlet pontos, sajnos, azonban a meghatározandó területet a vonzó görbével határolt szektornak szintén ismeretlen területével helyettesíti. C. RUNGE kimutatta, hogy ha a körfutás kezdeti A pontja a planimetrálandó felület S súlypontjával megegyezik és ha két, egymással 180° -kal elforgatott kezdeti beállítás mérésével meghatározott $\Delta\omega$ értékekből képezzük a középértéket, akkor nagy l értékekre F_2 megközelítőleg $\frac{1}{2} l \Delta\omega$, tehát $F = l \Delta\omega$. Ez a megközelítés r/l kb. harmadik hatványával arányos,

ahol r az F -et határoló görbe S -től számított rádiuszvektorainak egy középértékét jelenti. Ennek ellenére l -hez viszonyítottan igen kis átmérőjű felületek mérése sem adhat kielégítően pontos eredményeket, mivel ebben az esetben a lemérendő $\Delta\omega$ lesz igen kicsiny, s ezzel a mérés relatív hibája igen nagy. Pontos felületmeghatározás gyakorlati műszerül e planimeter nem alkalmas, viszont úgy látszik, hogy közönséges differenciálegyenletek gyakorlati megoldására célszerű segédműszernek bizonyul.¹²

Mielőtt a planimeterek további tárgyalását folytatnók, szeretnék megemlíteni egy gyakorlatilag igen elterjedt segédműszert, az ú. n. MADER—OTT-féle harmonikus analízátort. Ez a műszer tulajdonképpen nem tartozik a planimeterek közé, csupán felületplanimeter elé csatolt segédműszer. Célja, hogy egy mechanikailag vezérelt P_a mozgó ponttal a planimeter V pontját úgy vezesse, hogy az az

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{p} \int_0^p y(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\frac{2\pi n}{p} x \right) dx$$

értékét mérje, ha az analízátor V_a vezetett pontjával az $y(x)$ görbe p periódusát körülfutjuk. A MADER—OTT-analízátor e célt úgy éri el, hogy az $y(x)$ görbét művileg olyan $\bar{y}(\xi)$ zárt görbévé transzformálja, amelynek felszíne arányos a Fourier együtthatókkal.

E műszer három lényeges alkatrészből áll (17. ábra):

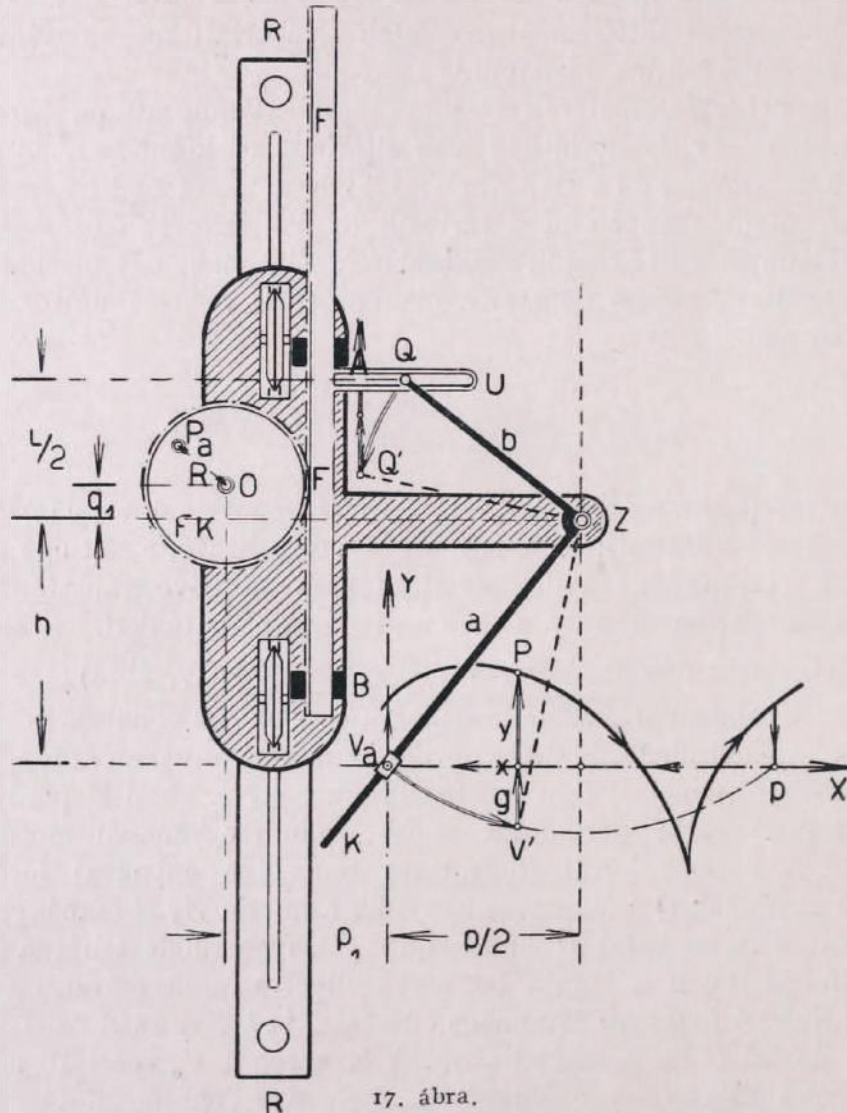
1. A rajzban sraffozott kocsiból, amely az RR vonalzós vezérléssel az xy -koordinátarendszer ordinátáinak irányában mozoghat. Az RR vezető vonalzót úgy kell beállítani, hogy a kocsi Z pontja az analizálandó görbe periódusát felező ordinátaegyenesen mozogjon.

2. A Z pont körül (függőleges tengelybe ágyazva) forog a QZK kar. Ennek Q csúszószége benyúlik a kocsin A, B csapágyakkal ágyazott FF fogasrúd U kulisszájába. A fogasrudat tehát a KZQ kar elforgatásával a kocsin (az y -tengellyel szintén párhuzamosan) eltolhatjuk. A fogasrúd maximális eltolási útja l . Ezt az A és B ágyazásba ütköző U kulissza biztosítja. A K karon a V_a vezetett pontot tetszőleges helyzetben rögzíthetjük. V_a -t úgy kell beállítani, hogy ha a fogasrúd legfelső helyzetében áll (U ütközik A -val), akkor V_a az x -tengelyen a periódus kezdőpontjával összeessék. Természetes, hogy ha a fogasrudat (Z pont eltolása nélkül) a K kar elforgatásával legalsó helyzetébe toljuk el (U ütközik B -vel), akkor V_a -nak az X -tengelyen a periódus végpontjába kell esnie. Eközben az elforgatás közben V_a a $V_a V'p$ «alapkört» írja le.

¹² VIETORIS, Ztsch. f. angew. Math. u. Mech. 15. kötet (1935), 238. lap.

V_a ezen beállítása miatt a konstruktív kivitel határain belül a műszer tetszőleges periodusra állítható be, s FF minden egyes esetben azonos l utat tesz meg.

3. Az FF fogasrúdba kapcsolódik a kocsin O tengellyel megerősített r sugarú FK fogaskerék. r úgy van meghatározva, hogy



az l úton n teljes körforgást végezzen, tehát $r = \frac{l}{2\pi n}$. Az FK fogaskereken, a középponttól R távolságban van a P_a pont, mely a transzformált görbét írja le.

Helyes beállítás után a kezdeti helyzetben tehát Z koordinátái $\left(\frac{p}{2}, h\right)$, O koordinátái $(-p_1, h + q_1)$. Jelölje az XOP_a szöget φ és a kezdeti helyzet szögét φ_0 .

Határozzuk most meg P_a útját, ha V_a -val az analizálandó görbét követjük. Mivel V_a és P_a között a kinematikai kapcsolat egyértelmű, azért, ha V_a -t a kezdőpontból különböző utakon vezetjük a görbén fekvő P pontba, P_a útja is más és más lesz, e különböző utak végpontjai azonban $V_a = P$ esetében azonosak. Eszerint P_a helyzetét, ha V_a -t O -tól P -ig vezetjük, a következő speciális út segítségével határozhatjuk meg: 1. $V_a \rightarrow V'$ (Z nyugalomban marad, QZK elfordul $Q'ZV'$ helyzetbe, V_a az alapkörön mozog) és 2. $V_a = V' \rightarrow P$ (a $Q'ZV'$ kar szögváltozás nélkül párhuzamosan tolódik el az ordináta-irányban $g(x, \phi) + y(x)$ -el.) Ha V_a -nak az alapkör ϕ útján a fogaskerék $2\pi n$ -el fordul el, akkor a V' -ig terjedő x úton $\frac{2\pi n}{\phi} x$ szöggel, azaz $\varphi = \frac{2\pi n}{\phi} x + \varphi_0$. Eszerint P_a helyzete a $V_a \rightarrow V' \rightarrow P$ elmozdulás után

$$\xi_{y(x)} = -\phi_1 + R \cos \varphi$$

$$\eta_{y(x)} = h + q_1 + g(x, \phi) + y(x) + R \sin \varphi$$

Ha V_a -val az x -tengely mentén haladunk végig az $(x, 0)$ pontig, P_a útjának végpontja

$$\xi_{0(x)} = -\phi_1 + R \cos \varphi$$

$$\eta_{0(x)} = h + q_1 + g(x, \phi) + R \sin \varphi$$

A görbe, az x -tengely és a teljes periódushoz tartozó két ordináta által határolt tartomány a

$$\eta_{y(x)} - \eta_{0(x)} = y(x), \quad \xi = -\phi_1 + R \cos \left(\frac{2\pi n}{\phi} x + \varphi_0 \right)$$

tartományba transzformálódik. Ennek területe

$$F = \int_{x=0}^{\phi} (\eta_{y(x)} - \eta_{0(x)}) d\xi = \left(-\frac{2}{\phi} \int_0^{\phi} y(x) \sin \left(\frac{2\pi n}{\phi} x + \varphi_0 \right) dx \right) \pi n R$$

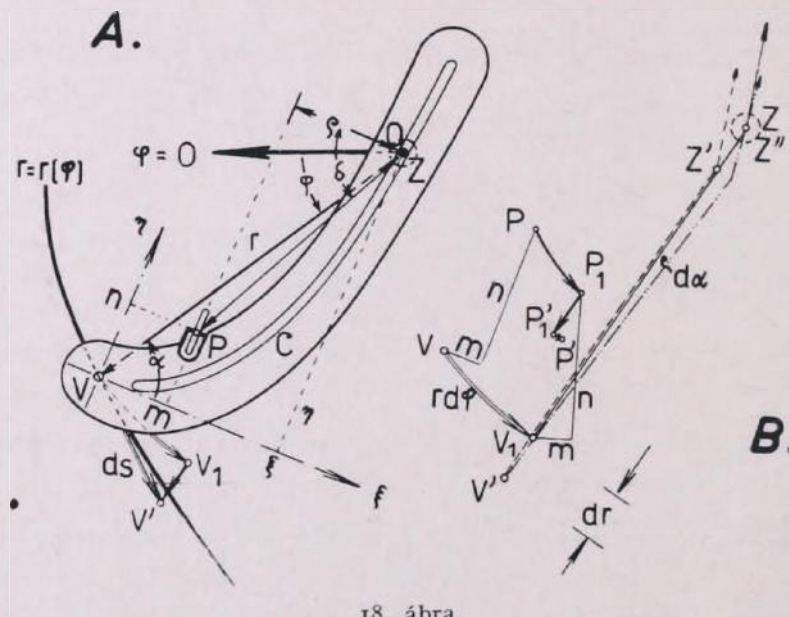
Ha $\varphi_0 = \begin{cases} \pi \\ \pi/2 \end{cases}$, akkor $F_{\pi, \pi/2} = \pi n R \begin{Bmatrix} b_n \\ a_n \end{Bmatrix}$. A P_a ponttól vezetett

planimeter tehát a Fourier együtthatókkal arányos területet mér. Megemlítendő, hogy a gyakorlati kivitel 2.5...72 cm periodushosszúságú függvények 25 koefficiensének analizálását teszi lehetővé. Több fogaskerék, s ugyanannyi planimeter egyidejű alkalmazásával el lehet érni, hogy egy körfutással egyszerre 14 együtt-ható értékét tudjuk meghatározni.

A radiális planimetereknél C_2 ponttá zsugorodik. Ezt a pontot a poláris koordinátarendszerünk kezdőpontjának válasz-

szuk. $r = r(\varphi)$ az adott integrálandó görbe. A legáltalánosabb esetben, midőn planimeterünkkel a $k\Delta U = \oint f(r(\varphi)) d\varphi$ integrált határozzuk meg (a többi gyakorlatilag fontos eset ebből könnyen származtatható), az integráló kar Z pontját, amely az alapsíkhöz rögzített O kezdőponttal egybeesik egy meghatározott C görbe mentén (bemart csatorna, vagy kulissza által) vezetjük, miközben V az $r(\varphi)$ görbét írja le. Ha az általános planiméteregyenletet akarnánk alkalmazni, akkor a P pontnak e kényszervezérlés által meghatározott pályáját és a 6. egyenletben fellépő többi adatokat kellene kiszámítanunk.

Az IK gördülését ebben az esetben is sokkal könnyebben hatá-



18. ábra.

rozhatjuk meg az elmozdulási differenciálok szemlélete alapján. A 18a. ábrán A. Ott kivételében látható a sablonnak kiképzett integráló kar, ennek C kivágásába nyúlik be az O kezdőpontnak az alapsíkhöz rögzített csúszó szege. A V ponttól az IK P érintési pontja (m, n) távolságban van. A K_s, T_s síkok vetületével legyen párhuzamos a sablonnal összekötött ξ, η derékszögű koordinatarendszer. Ebben a rendszerben $\xi = \xi(r), \eta = \eta(r)$ a C csatorna középvonalának egyenlete. Ezeket a

$$9 \dots \quad \xi = \varrho + m, \quad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

egyenletekből határozhatjuk meg, feltéve, hogy ϱ mint r függvény e ismeretes. A V vezetett pontnak az $r(\varphi)$ görbe mentén való $V \rightarrow V'$ elmozdulását a $|\overline{VV_1}| = rd\varphi$ és $|\overline{V_1V'}| = dr$ elmozdulásokra bontjuk

fel. A $V \rightarrow V_1$ elmozdulás a K integráló karnak O pont körüli elfordulását jelenti, ezalatt P útja $|\overline{OP}| d\varphi$ az IK gördülése pedig

$$dh_1 = |\overline{OP}| d\varphi \cos \delta = \varrho d\varphi.$$

A $V_1 \rightarrow V'$ elmozdulást felbonthatjuk két virtuális elmozdulás összegére: 1. a \overline{VZ} iránnyal párhuzamos dr nagyságú $\overline{V_1Z} \rightarrow V'Z'$ elmozdulásra, mintha a sablon kivágása és a csúszó szeg nem gátolná az integráló kart mozgásában és 2. V' körül egy olyan da szöggel való $\overline{V'Z'} \rightarrow \overline{V'Z''}$ elfordulásra, amelyet az jellemez, hogy a sablon kivágása újból a csúszó szeggel fedésbe jut. Mivel differenciális elmozdulásokról van szó, a C görbe a Z ponthoz tartozó ívelemével helyettesíthető (18b. ábra).

Az 1. elmozdulásnál az IK gördülése $dh_2 = -dr \sin \alpha = -\frac{\eta(r)}{r} dr$

a 2.-nél $dh_3 = |\overline{V'P}| da \cos \delta = m da = m \frac{\operatorname{tg} \vartheta(r)}{r} dr$. A rezultáns differenciális gördülés tehát

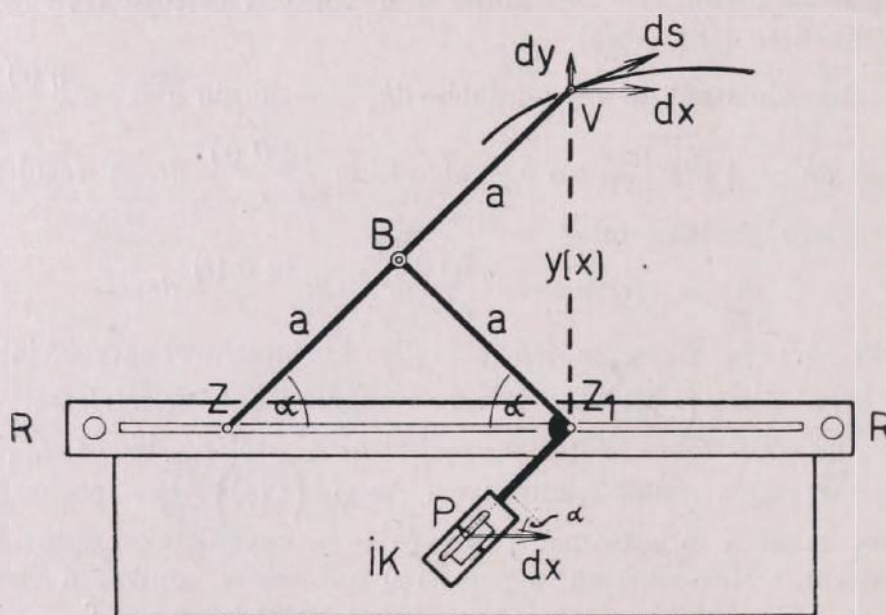
$$dh = \varrho(r) d\varphi - \frac{\eta(r)}{r} dr - m \frac{\operatorname{tg} \vartheta(r)}{r} dr$$

Ennek a zárt $r(\varphi)$ görbe mentén való teljes körfutásra vonatkozó integrálja $k \Delta U = \oint \varrho(r(\varphi)) d\varphi$, mivel a regulárisnak feltételezett két utolsó integrál teljes körfutás esetében r_{\max} -tól r_{\min} -ig és r_{\min} -tól r_{\max} -ig integrálva nullát eredményez. Az $\oint f(r(\varphi)) d\varphi$ meghatározásakor tehát a C csatornát $f = \varrho$ és a 9. egyenletek szerint kell kialakítani.¹³ Megemlítendő a $\varrho = r(\varphi)$ határeset, amikor a vezető C görbe a VZ egyenesbe megy át. Ez a planimeter az $\int r(\varphi) d\varphi$ értékét méri. Ekkor $m = 0$, $\eta = 0$, a gördülés két utolsó komponense teljes körfutás nélkül is eltűnik, és a leolvasási különbség bármely kezdeti és végpont között az $\int r(\varphi) d\varphi$ értékét, tehát a határozatlan radiális integrált méri.

5. Integrimeterek. Azokat a planimétereket, amelyek határozatlan integrálokat mérnek, integrimetereknek nevezzük. Szüksége, hogy az integrimeterekre érvényes planiméteregyenlet szabad tagjai (teljes körfutás nélkül is) identikusan eltűnjenek. E feltétel oly kivitellel valósítható meg, amelyben az IK K_s síkja minden helyzetben merőleges azokra az elmozdulásokra, amelyek a közönséges planimétereknél a csak teljes körfutás esetében eltűnő szabad tagokat állítják elő.

¹³ Az összes lineáris hatvány- és függvényplaniméterekkel mérhető integrálokhoz a megfelelő radiális planiméterek is mind ismeretesek.

Ezt az elvet egyszerűen valósítja meg A. OTT lineáris alapintegrátora. Ez egy lineáris planimeter az IK oly célszerű elhelyezésével, hogy V -nek dy mentén való eltolása nem okoz görbülést, a dx elmozdulás viszont $dh = dx \cdot \sin a$ görbülést hoz létre (19. ábra). A műszer elvi kivitele a következő. A ZV integráló kar a B csuklópontban kapcsolódik a BZ_1P integráló kereket hordozó könyökhöz. E csuklórendszer Z és Z_1 pontját csúszószeget vezeti az RR vonalzó (x -tengelynek megfelelő) csatornájában. E csuklórendszer a vonalzótól vezetve V -nek dx elmozdulásakor mint szilárd egész csúszik el az x -tengely mentén, az IK érintési pontja eszerint



19. ábra.

szintén dx elmozdulást végez, görbülése tehát $dh = dx \cdot \sin a$. V -nek dy elmozdulásakor a csuklórendszer da szöggel összebb csukódik. Z közeledik Z_1 -hez, Z_1 azonban nyugalomban marad. Eszerint az IK a Z_1 pont körül $|Z_1P| da$ elfordulást végez. Ez az elfordulás a kerék síkjára merőleges, tehát nem ad görbülési komponenst. E műszer teljes planimeteregyenlete eszerint

$$k\Delta U = \int_0^x \sin a \, dx = \frac{l}{l} \int_0^x y(x) \, dx.$$

A tetszőleges kezdeti és végpont közötti határozatlan integrál értéke tehát arányos e két pont között fellépő leolvasási különbséggel.

Közelfekvő az a gondolat, hogy az IK -et hordozó Z_1P kart ne kössük össze szilárdul a BZ_1 karral, hanem úgy szerkesszük meg a készüléket, hogy a V pont a Z_1 pont körül pl. kulisszák segítségével

vezesse a Z_1P kart, függetlenül a BZ_1 kartól. A kulissza görbéjének megfelelő választásával általános függvényintegrímeterek szerkeszthetők. E gondolat elvileg helyes, gyakorlatilag azonban magasabb hatványintegrímeterek esetében kinematikai zárolások elkerülése végett a Z_1P kar szögváltozását mind kisebbnek kell vennünk, s ez a mérési eredmény pontosságának nagyfokú csökkenésével jár. Megadott $y(x)$ függvény négyzetének, négyzetgyökének vagy reciprokértékének közvetlen határozatlan integrációjára célszerűbb a lineáris alapintegrímetér elé egy segédműszert iktatni, amely a megfelelő transzformációt elvégzi. Az említett két első esetben ily segédműszer lehet a már ismertetett OTT-féle hatványplanimeter vezérlése.

Az integrímeterekkel összefüggően — különösképp a lineáris felületplanimeterek teljes kihasználásához — lényeges, hogy minden lineáris felületplanimeter egyszerű korrekktúra segítségével alapintegrímeterként is felhasználható.

Szemléljük e célból még egyszer a lineáris felületplanimeter alapegyenletét:

$$lkU \Big|_{P'}^{P''} = \int_{P'}^{P''} y(x) dx + \frac{1}{2} (l^2 - 2lm) a \Big|_{P'}^{P''} - \frac{l^2}{4} \sin 2a \Big|_{P'}^{P''} \equiv$$

$$\equiv \int_{P'}^{P''} y(x) dx + \psi(y(x)) \Big|_{P'}^{P''}$$

ahol $\psi(y) = \frac{1}{2} (l^2 - 2lm) \arcsin \frac{y}{l} - \frac{y}{2} \sqrt{l^2 - y^2}$ mivel $\sin a = \frac{y}{l}$.

Eszerint tetszőleges kezdeti és végpont között

$$\int_P^Q y(x) dx = lkU \Big|_P^Q - \psi(y) \Big|_{y_P}^{y_Q}.$$

Ha a $\psi(y)$ korrekktúrafüggvény egyszeri helyes meghatározása után¹⁴

¹⁴ A $\psi(y)$ függvény meghatározásakor azonban az a nehézség adódik, hogy φ -ben a planimeter l, k, m ismeretlen konstrukciós adatai is fellépnek, melyeknek értékei nélkül a planimeterhez tartozó korrekktúrafüggvényt nem tudjuk kiszámítani.

Ezeknek az állandóknak az értékeit ismert felületek planimetrálása útján nyerhetjük, mégpedig, mivel a planimetrált értékek mindig csak bizonyos szórás hibáival határozhatók meg, azért ezeket az állandókat a kiegyenlítő számítás elvei alapján kell kiszámítanunk.

E számítás (amelyet egy planimeterre vonatkozólag csak egyszer kell elvégezni) meglehetősen bonyolult, s ezért főbb vonásaiban vázolom.

Integráljuk az $y = \operatorname{tg} \vartheta (x - a)$ egyenest a $P_0 (x = a, y = 0)$ ponttól a

az lk -val szorzott leolvasási különbséget e korrektúrával helyesbítjük, akkor az integrál tetszőleges P és Q közötti értékét nyerjük. Lineáris planimeterünket így integrimeterként is felhasználhatjuk.

Míg a lineáris alapintegrimeter ismertett kivitele legújabb keletű, a precíziós tárcsás lineáris integrimeter elve (GONELLA-mechanizmus) több mint 100 éves (20. ábra). Ez az integrimeter egy T tárcsát megfelelő kocsi, vagy sínvezetés segítségével az x -tengellyel párhuzamosan és úgy vezet, hogy a kocsi dx elmoz-

P_i ($a + hi, \operatorname{tg} \vartheta hi$) pontig. A P_0 -tól P_i -ig terjedő terület számértéke $\int_{P_0}^{P_i} y dx = \frac{1}{2} h^2 i^2 \operatorname{tg} \vartheta$,

az ehhez tartozó x -adik mérési sorozatból leolvasott érték pedig $\Delta U_{i,x}$. A három ismeretlen állandó meghatározására tehát a következő $3n$ egyenlet ($x = 1 \dots n, i = 1, 2, 3$)

$$lk \Delta U_{i,x} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \vartheta i^2 + \frac{1}{2} (l^2 - 2lm) \arcsin \left(\frac{h \operatorname{tg} \vartheta}{l} i \right) - \frac{l^2}{2} \left(\frac{h \operatorname{tg} \vartheta}{l} i \right) \sqrt{1 - \left(\frac{h \operatorname{tg} \vartheta}{l} i \right)^2}$$

áll rendelkezésünkre. Jelöljük $lk = \alpha, \frac{1}{2} (l^2 - 2lm) = \beta, \frac{h \operatorname{tg} \vartheta}{l} = \gamma$ az előbbi egyenlet ismeretlenjeit, $\Delta U_{i,x}, h \operatorname{tg} \vartheta = a$ és h pedig az ismert értékeket.

Ha most $2\gamma\alpha = \bar{\alpha}, 2\beta\gamma^2 = \bar{\beta}$ jelölést vezetjük be, akkor

$$\bar{\alpha} \Delta U_{i,x} = i^2 h a \gamma + \bar{\beta} i \frac{\arcsin(\gamma i)}{\gamma i} - a^2 i \sqrt{1 - \gamma^2 i^2}.$$

Tekintettel arra, hogy hibás mérési eredményekből a három ismeretlen úgysem határozható meg pontosan, előbb egy megközelítő értékrendszert számítunk ki, s ezt javítjuk majd a kiegyenlítő számítás elvei alapján. Ha h -t és $\operatorname{tg} \vartheta$ -át úgy vesszük fel, hogy nemcsak γ , de 3γ is jóval kisebb az egységnél és ha ΔU_i jelöli az i -edik felület mérésekor végzett n leolvasás középértékét, vagyis $\Delta U_i = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \Delta U_{i,x}$, akkor az előbbi egyenletrendszer négyzetes közelítéssel az

$$\bar{\alpha}_0 \Delta U_i = i^2 h a \gamma_0 + i \bar{\beta}_0 - a^2 i + \frac{a^2}{2} i^3 \gamma_0^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

egyenletrendszerbe megy át. Ennek megoldása

$$\gamma_0 = -\frac{h}{a} p_1, \bar{\alpha}_0 = 2h^2 \frac{p_1}{q_2}, \bar{\beta}_0 = a^2 + \frac{1}{6} \bar{\alpha}_0 q_3,$$

ahol

$$p_1 = \frac{2}{3} \frac{q_1}{q_2}, q_1 = 3\Delta U_1 - 3\Delta U_2 + \Delta U_3$$

$$q_2 = 5\Delta U_1 - 4\Delta U_2 + \Delta U_3, q_3 = 15\Delta U_1 - 9\Delta U_2 + 2\Delta U_3.$$

Ha a $3n$ mérés felhasználásával kiegyenlített gyökértékek

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + \tau_\alpha, \bar{\beta} = \bar{\beta}_0 + \tau_\beta, \gamma = \gamma_0 + \tau_\gamma,$$

akkor ezeket a korrektúrákat az

$$\bar{\alpha}_0 \Delta U_{i,x} + B_i(\bar{\beta}_0, \gamma_0) = -\Delta U_{i,x} \tau_\alpha + \frac{\arcsin(\gamma_0 i)}{\gamma_0} \tau_\beta - \tau_\gamma \left(\frac{\partial B_i}{\partial \gamma_0} \right)_{\bar{\beta}_0, \gamma_0}$$

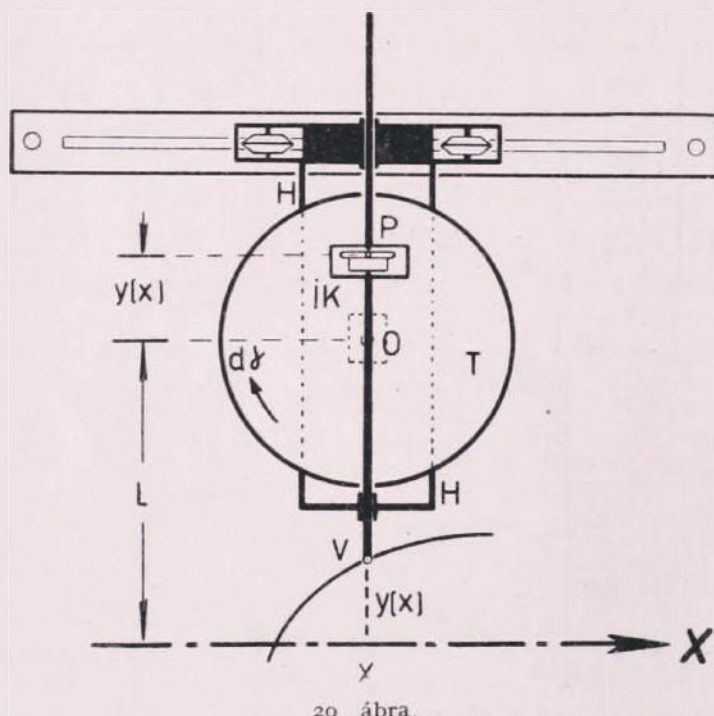
egyenletrendszerből, ahol

$$B_i(\bar{\beta}_0, \gamma_0) = - \left[i^2 h a \gamma_0 + \bar{\beta}_0 \frac{\arcsin(\gamma_0 i)}{\gamma_0} - a^2 i \sqrt{1 - \gamma_0^2 i^2} \right]$$

a Gauss-féle kiegyenlítés normálegyenletei segítségével határozhatjuk meg. Miután az állandókat ilymódon kiszámítottuk, a $\psi(y)$ korrektúrafüggvényt mint «műszerállandó» tabelláris, vagy grafikus úton rögzítjük.

dulásának a tárcsa $d\gamma = v dx$ elfordulása feleljen meg. A tárcsán csúszósvezérlésű H keretben ágyazva nyugszik az IK , tengelye a tárcsa O csapágyközepénél megy át és merőleges az x -irányra. A tengelynek V végpontját vezetjük (elvileg) a megadott görbe mentén. Az IK gördülése dy elmozduláskor nulla, dx elmozduláskor $dh = |OP| d\gamma = y(x) v dx$, azaz

$$k\Delta U = v \int y(x) dx$$



6. Az általános integráló műszer elve és az integráf. Újabban az előbbi integráló berendezés (amely az erők inverz bevezetésével differenciálást végez) közönséges differenciálegyenletek és az infinitesimális számítás más feladatainak művi megoldására szerkesztett gépek¹⁵ alapelemévé vált, miután sikerült olyan erősítő berendezéseket szerkeszteni, amelyek az IK -re ható igen kicsiny forgató nyomatékokat rezgés- és torzításmentesen annyira meg tudják erősíteni, hogy az IK a gördülésével kapcsolt műveket kinematikailag irányítani képes. Ezeknek a nyomatékerősítő és rezgéscsillapító egységeknek még vázlatos tárgyalása is túlhaladja ennek a dolgozatnak a keretét. Emiatt csak arra szorítkozunk, hogy egy egyszerű integráló gép elvi

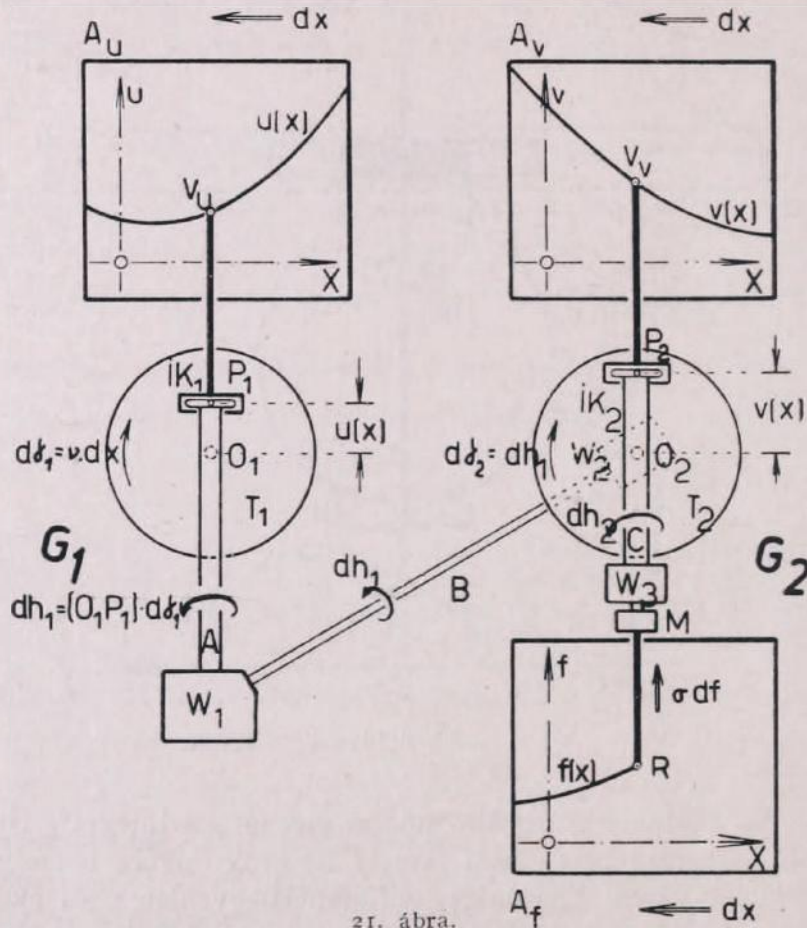
¹⁵ Pl. a névleg olyan közismert «célirányzó készülékek» egy részének differenciálást elvégző hajtóműve.

kapcsolásán ismertessük a gyakorlati matematika ezen gazdag területeket megnyitó megfontolásainak alapját.

Az általános szorzati integrál elvét akarjuk a következőkben ismertetni. A gép grafikusan megadott $u(x)$ és $v(x)$ függvényekből az

$$f(x) = \int^x u(x) v(x) dx$$

integrálgörbét határozza meg (21. ábra).



E géphez legelőször is három ú. n. asztal szükséges (azaz kifeszített rajzlappal borított és a síkjába felvett x -tengely irányában párhuzamosan mozgatható három rajztábla).¹⁶ A két megadott függvénynek a gépbe való bevezetésére szolgálnak az ú. n. A_u és A_v «adó» asztalok, amelyekre az u és v függvényeket felrajzoltuk. Az f

¹⁶ Az «asztal» fogalmán természetesen hengereket is érthetünk, amelyekre a görbét tartalmazó rajzlapokat ráfeszítjük. A dx eltolás ekkor a hengerek dx elforgatásával értelmezendő.

eredmény felvevására szolgál az A_1 «vevő» asztal. E három asztal (pl. elektromotoros meghajtással) a három x -tengely mentén azonos dx eltolást végez. Az eltolás közben az adó asztalok $u(x)$ és $v(x)$ görbéit a műszer V_u és V_v vezetett pontjaival kell követnünk. V_u a G_1 GONELLA-mechanizmus integráló kerekének eltolását irányítja. Ennek T_1 tárcsája arányosan forog az asztalok elmozdulásával, tehát $d\gamma_1 = v dx$. A G_1 mechanizmus egység sugarú IK_1 integráló kerekének gördülése eszerint $dh_1 = (\overline{O_1P_1}) d\gamma_1 = v u(x) dx$. E gördülést (szög-elmozdulást) az A és B tengely, a W_1 és W_2 nyomatékerősítő, rezgés-csillapító és áttétel segítségével bevezetjük a G_2 GONELLA-mechanizmus T_2 tárcsájába. T_2 szögelfordulása tehát $d\gamma_2 \equiv dh_1 = v u(x) dx$. A $v(x)$ görbe mentén vezetett V_v vezetett pont a G_2 mechanizmus egység sugarú IK_2 integráló kerekét vezeti. Ennek gördülése (szögelfordulása) eszerint $dh_2 = (\overline{O_2P_2}) d\gamma_2 = v(x) dh_1 = v u(x) v(x) dx$. E szögelfordulást a C tengely, W_3 nyomatékerősítőn és rezgés-csillapítón át vezeti az M mozgásátalakítóba, amely a dh_2 elfordulási szöget (pl. csigakerék és fogasrudas áttétellel) ezzel a szöggel arányos hosszúsággá ($dh_2 = \sigma df$) alakítja át. Ezzel a készülékkel kapcsolt R írón az A_1 vevőasztalon a $\sigma df = v u(x) v(x) dx$ egyenlet szerint

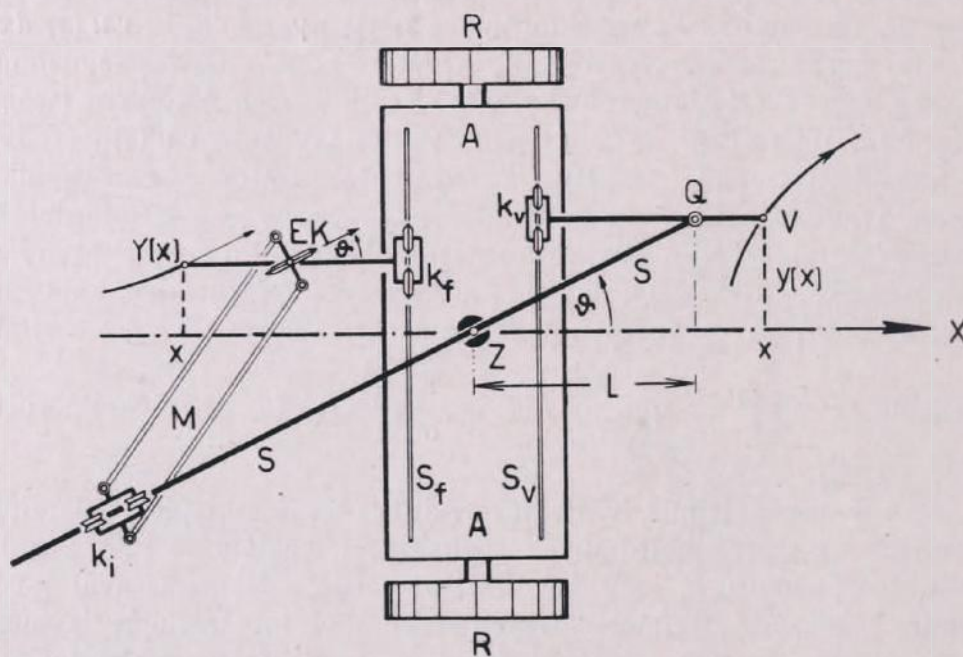
mozdul el, tehát az írón az $f(x) = \frac{v}{\sigma} \int_0^x u(x) v(x) dx$ integrálgörbét rajzolja fel.

A G -mechanizmus, nyomatékerősítő és rezgés-csillapító, valamint összeadó és szorzó hajtóművek segítségével legalább n adó asztal, n G mechanizmus és egy vevő asztal célszerű kapcsolásával n -ed rendű közönséges differenciálegyenletek művi integrációját is meg lehet oldani. Ezzel a kérdéssel azonban itt annál kevésbé foglalkozunk, mert a technikai kivitel nagy nehézségeinek részletes ismeretése nélkül az elvi kapcsolások relatív egyszerűsége az olvasónak hamis képet adhatna e gépekről.¹⁷

Differenciálegyenletek művi megoldására irányuló régebbi kísérletek egész más elvi alapokból indultak ki, t. i. az élesperemű kerék konstruktív egységéből. Ezen elv csakis a határozatlan integrál felrajzolására szolgáló (tehát a legegyszerűbb $\frac{dY}{dx} = y(x)$ differenciálegyenletet megoldó) gyakorlatilag sokoldalúan bevált ABDANK—ABAKANOWICZ-féle integrálfában terjedt el (G. CORADI, A. OTT).

¹⁷ Különböző (legfeljebb másodrendű) feladatok elvégzésére szolgáló kapcsolási sémák tárgyalása megtalálható: MEYER ZUR CAPELLEN: Das Reibradgetriebe als Integrator c. kitűnő összefoglalásában. Ztsch. f. Instr.-Kunde. (1943, 7. füzet, 241. oldal.)

Ennek a műszernek működési elve nagyon egyszerű. Az RR hengerkerekektől egyenesvonalon vezérelt A alapkocsi Z pontja az x -tengely mentén mozog (22. ábra). Az alapkocsinak S_v és S_f csatornája az y -iránnyal párhuzamosan vezérli a k_v és k_f adó és vevő kocsikat. Az adó kocsi vezető karjának V végpontját az integrálandó $y(x)$ görbe mentén vezetjük végig. A vezető kar Q (függőleges) tengelyében ágyazva fekszik az SS sín, amelynek második rögzített pontja a Z -ben függőleges tengely körül forgatható csúszó ágyazás.



22. ábra.

Ennek a sínnek az x -tengellyel bezárt ϑ szögére áll $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\dot{y}(x)}{l}$.

Az SS sínen mozog egy k_i irányító kocsi, amelynek az a szerepe, hogy az éles peremű, nehéz EK keréknek K_s síkját az M parallelogramma vezérléssel SS -hez párhuzamosan vezesse. Az EK -t a k_f kocsi hordozza. k_f az EK miatt csakis a ϑ irányában tud elmozdulni. Ha V -t $y(x)$ mentén vezetjük, k_f és a vele összekötött írón eszerint egy olyan

$Y(x)$ görbét ír le, amelynek iránytangense $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dY}{dx} = \frac{1}{l} y(x)$.

A felrajzolt görbe tehát $Y(x) = \frac{1}{l} \int y(x) dx + C$ egyenletet elégíti ki.

ÜBER INTEGRIERGERÄTE DER PRAKTISCHEN MATHEMATIK

von S. v. Borbély (Kolozsvár)

In dieser Arbeit wird eine Übersicht über die gebräuchlichsten Integriergeräte der praktischen Mathematik gegeben, Theorie, Wirkungsweise und der Prinzipaufbau der verschiedensten Planimeterausführungen und einiger Integriermechanismen kurz zusammengestellt.

Nach Beschreibung der Wirkungsweise des einfachen Integrier-
rädchens wird die Rollenabwicklung bei allgemeiner Verschiebung
des Integrierrädchens hergeleitet und kurz auf die Fehlermöglich-
keiten und deren Einfluss hingewiesen. Als Beispiel zum Vorigen
wird die Theorie des Harvey-schen Harmonischen Analysators
dargestellt. Der Hauptteil der Arbeit ist den Planimetern gewidmet:
Grundplanimeter, Momentenplanimeter, Wurzelplanimeter, Funktions-
planimeter, Scheiben- und Kugelrollplanimeter, wird im Abschnitt
über Linearplanimeter behandelt. Danach wird die allgemeine
Planimetergleichung hergeleitet, Kompensations- und Präzisions-
polarplanimeter, sowie radiale Planimeter besprochen. Als Beispiel
eines Vorgelegegetriebes wird der Mader—Ott-sche Harmonische
Analysator näher dargestellt. Das Prinzip des Grund- und Funktio-
nenintegrimeters, sowie des Gonella-schen Mechanismus folgen.
Danach wird das Prinzip eines allgemeinen Integriermechanismus
und das des Integraphen besprochen.

AZ ATOM HULLÁMMECHANIKAI ÉS STATISZ- TIKUS ELMÉLETÉNEK KAPCSOLATA

Irta: Fényes Imre

III. A kinetikus energia korrekciói.

Bevezetés. Előző dolgozatomban¹ kimutattam, hogy az atom
statisztikus elméletének alapegyenleteit egyszerűen — minden külön
feltevés nélkül — levezethetjük a «*self-consistent field*»² megfelelő
egyenleteiből. A levezetésben a következő közelítések szerepelnek:

¹ FÉNYES I., Az atom hullámmechanikai és statisztikus elméletének kapcsolata.
(I. A «*self-consistent field*» módszere és a statisztikus atommodell. II. A valenciaelektron-
is tartalmazó atomok hullámmechanikai és statisztikus elméletének kapcsolata.) *Csilla-
gászati Lapok* 6, 49—69 (2. sz.), 1943. További hivatkozásoknál az első részt I.-el,
a második részt II.-vel jelöljük.

² Id. az I. (3, 1) és (3, 2), valamint az 5. szakasz formuláit.