Differenciálegyenletek (ismétlés)

Tek: $\dot{x} = f(t, x)$ (1) KF: $x(t_0) = x^0 \in X$

$x \in X \subset \mathbb{R}^n$ (X nyílt, öfüggő) $t_0 \in \mathbb{R}$

$f \in C^0(\mathbb{R} \times X)$, $f: \mathbb{R} \times X \mapsto \mathbb{R}^n$

$I \subset \mathbb{R}$

mo: $\varphi: I \mapsto \mathbb{R}^n$, ha $t \in I$: $\varphi(t) \in X$, $\varphi \in C^1(I)$ és

$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$

kielégíti a kf-t, ha $\varphi(t_0) = x^0$

általában a következőben jelöljük $\varphi(t, t_0, x^0)$ és

$\varphi(t_0, t_0, x^0) = x^0$

Stabilitás

L: f elég sima ahhoz, hogy a kéta megoldásának létezése és egyértelműsége és a kv-ktől való folytonos függés biztosítva legyen. Ezért:

$f \in C^0(R_+ \times X)$, (persze R_+ helyett ($R_+ = [0, \infty)$)

$f'_x \in C^0(R_+ \times X)$ tetszőleges felülről nem korl int. jó)

Tek a $\Psi: R_+ \mapsto X$ mo-t $\Psi^0 = \Psi(t_0)$

Trafó: $y = x - \Psi(t)$

$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\Psi}(t) = f(t, \Psi(t) + y) - f(t, \Psi(t)) = g(t, y)$

Azaz $y \equiv 0$ ez utóbbi de konstans mo-a.

Ezért a zérus mo stabilitása megfelel $\Psi(t)$ stabilitásának

(Ha (1) autonóm akkor a transzformált nem mindig az,

de nem feltétlenül érdemes elvégezni a trafót.)

Def: Azt a $\psi: \mathbb{R}_+ \mapsto X$ (1) mo-a Ljapunov értelemben stabilis, ha

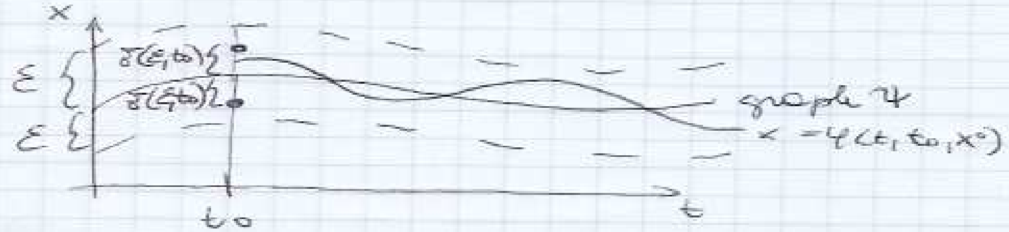
$\forall \varepsilon > 0$ $\forall t_0 \geq 0$-ra $\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ úgy hogy

$\forall |x^0 - \psi^0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ esetén

— a $\varphi(t, t_0, x^0)$ értelmezett $[t_0, \infty)$-n és

— $|\varphi(t, t_0, x^0) - \psi(t)| < \varepsilon$ $\forall$ $t > t_0$-ra.

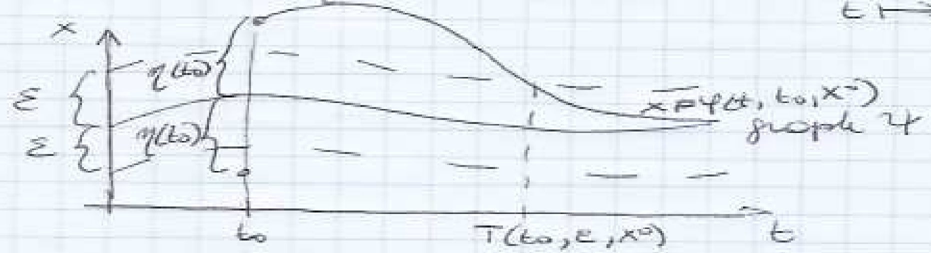
Def: Azt ψ egyenletesen stabilis, ha δ nem függ t_0-tól.



Def: Azt a $\psi: \mathbb{R}_+ \mapsto X$ (1) mo-a attraktív ha

$\forall$ $t_0 \geq 0$-ra $\exists$ $\eta(t_0) > 0$ úgy, hogy

$\forall |x^0 - \psi^0| < \eta(t_0)$ esetén $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t, t_0, x^0) - \psi(t)| = 0$

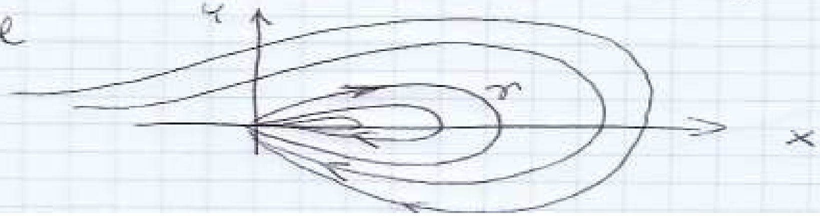


azaz $\exists$ $T(t_0, \varepsilon, x^0)$ hogy $t \geq t_0 + T(t_0, \varepsilon, x^0)$-ra

$|\varphi(t, t_0, x^0) - \psi(t)| < \varepsilon$

Mgj: Az attraktivitásból nem következik a stabilitás!

pl



Autonóm rsz- pályái

γ a zárt és nem zárt. pályákat elválasztó görbe

Def: Azt ψ aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és vonzó.

Def: Azt A attraktivitási tartomány-a ψ-nek t_0-ban, ha az
$A(t_0) = \{ x^0 \in X : \lim_{t\to\infty} |\varphi(t,t_0,x^0) - \psi(t)| = 0 \}$
a maximális nyílt halmaz amelyből a t_0-ban a mo-k vonzók.

Def: Ha $\forall\, t_0 \geq 0$-ra $A(t_0) = X = \mathbb{R}^n$, akkor azt ψ globálisan attraktív

Def: Ha ψ stabilis és globálisan attraktív akkor azt ψ globálisan aszimptotikusan stabilis

Lineáris rsz-k stabilitása

L: $\dot\varphi = A(t)\varphi + b(t)$ (2)

$A \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$

$b \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$

Tétel: Ha (2) egy mo-a Ljap. stabilis (v. asz. stab), akkor minden mo-a Ljap. stab (v. asz. stab)

Biz: Ismert, hogy minden mo-a egészen $\mathbb{R}_+$-on definiált. Rögzítsünk egy $\psi(t)$ mo-t, alkalmazzuk az $x = \varphi - \psi(t)$ hajtást. Ha φ mo-a (2)-nek, akkor x az $\dot x = A(t)x$ mo-a és fordítva is igaz, ui.:

$\dot x = \dot\varphi - \dot\psi(t) = A(t)\varphi + b(t) - A(t)\psi(t) - b(t) = A(t)(\varphi - \psi(t)) = A(t)x$

~~Egy mo φ az akkor~~ ψ Ljap. stab akkor és csak akkor ha az $x = 0$ mo-a a homogénnek Ljap. stab.

Megj: Fenti esetben azt fogjuk mondani, hogy a rsz (2) stabilis

Köv: Ha a homogén rsz stabilis, akkor tetsz $b \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$-re (2) stabilis lesz.

Köv: Ha (2) asz stab, akkor globálisan is asz stab.

Biz: Ekkor a hom mo-ai n lin ftlen mo lin kombjából áll elő!

Állandó eh-s lineáris rsz-ek stabilitása

Tek: $\dot{x} = Ax$ (3)

Tétel (3) asz stab, akkor A stabilis.

Biz: Ez látszik a mo-k szerkezetéből.

Tétel: (3) stabilis (nem asz stab) akkor, ha A sajátértékeinek valós része nempozitív, és azok a sajátértékek, amelyek valós része nulla, A minimálpolinomjának egyszeres gyökei

Biz: Jordan alakból látszik.

Tétel Ha A-nak van poz. valósrészű sajátérték vagy a minimálpolinomjának van többszörös multiplicitású zérus valósrészű gyöke akkor a rsz instabilis

Tek: $D(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ karpolinomot.
($n \geq 1$, $a_n > 0$ és $a_i \in \mathbb{R}$)

Tétel: Ha $D(\lambda)$ stabilis akkor $a_k > 0$ $(k = 0, 1, \dots, n)$

Megj: $n=2$-re a szükséges feltétel elégséges is.
$n \geq 3$-tól ez már nem igaz.

<u>Tétel:</u> TF, H $\mathcal{D}(\lambda)$-ban $a_k > 0$ $\forall k$-ra.

Tek az ún. Hurwitz mx-t:

$$H_p = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & & a_n \end{bmatrix},$$

ahol $a_k = 0$ ha $k > n$.

Ekkor $\mathcal{D}(\lambda)$ aszt. stab., ha a H_p fő minorai pozitívak.

<u>Biz:</u> Demidovich [1967]

<u>Pl</u> $n=3$-ra: $a_1 a_2 > a_0 a_3$

<u>ěőjestabilita!</u>

ěeoőbb !!

Ljapunov direkt módszer

Def: Tek: $V : \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}$,

$U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ö.függő,

$0 \in U$

$V \in C^1$

Azt mondjuk V poz szemidefinit, ha $V(t,x) \geq 0$ $\forall$ $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times U$

Azt mondjuk V poz definit, ha $\exists$ $W \in C^0(U, \mathbb{R})$ úgy, hogy $\forall$ $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times U$, $x \neq 0$-ra $V(t,x) \geq W(x) > 0$ és $V(t,0) = W(0) = 0$.

Azt mondjuk V indefinit ha az origó minden B környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is $\mathbb{R}_+ \times B$-re

Def: Azt mondjuk a $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a Hahn-féle K függvényosztályhoz tartozik ha $h(0) = 0$ és szigorúan növekvő folytonos fv.

Megj: A K fv osztály segítségével könnyű V poz definitását megfogalmazni, míg:
$\forall$ $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times U$, $V(t,x) \geq h(|x|)$ éppen V poz definitását jelenti.

Tek:
$\dot{x} = f(t,x)$ (1)

$x \in X \subset \mathbb{R}^n$

$x = 0 \in X$

$f \in C^0(\mathbb{R}_+ \times X)$

$f'_x \in C^0(\mathbb{R}_+ \times X)$

$f(t,0) = 0$

(1) $x=0$ mo-nak stabilitásával fogunk foglalkozni.
(Triviális esetén megoldás $x=0$)

Def: L: $V \in C^1(\mathbb{R}_+ \times U)$, $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ adott függv.

V (1) rsz. értelmében vett deriváltja $(t_0, x^0) \in \mathbb{R}_+ \times U$-

$$\dot{V}_{(1)}(t_0, x^0) = \frac{d}{dt} V(t, \varphi(t, t_0, x^0))\Big|_{t=t_0} =$$

$$= V'_t(t_0, x^0) + \sum_{k=1}^{n} V'_{x_k}(t_0, x^0)\, f_k(t, x^0) =$$

$$= V'_t(t_0, x^0) + \langle \operatorname{grad} V(t_0, x^0); f(t_0, x^0) \rangle,$$

ahol φ az (1) x^0 ef-hez tartozó mo-a $t=t_0$-ban.

Megj: $\dot{V}_{(1)} \in C^0(\mathbb{R}_+ \times U, \mathbb{R})$

Tétel: Ljapunov 1. tétele

Ha $\exists\ V \in C^1(\mathbb{R}_+ \times U, \mathbb{R})$, $0 \in U \subset X$ és

$h \in \mathcal{K}$ úgy, hogy

$\forall\ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$-ra

(1) $V(t, x) \geq h(|x|)$, $V(t, 0) = 0$ és

(2) $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq 0$ akkor

az origó Ljap értelemben stabilis.

Megj: Ha még $\exists\ h_2 \in \mathcal{K}$ úgy, hogy $V(t, x) \leq h_2(|x|)$,

akkor egyenletesen is stabil.

Tétel Ljapunov 2. tétele

Ha $\exists\ V \in C^1(\mathbb{R}_+ \times U, \mathbb{R})$, $0 \in U \subset X$ és

$h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{K}$ úgy, hogy

$\forall\ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$-ra

(1) $h_1(|x|) \leq V(t, x) \leq h_2(|x|)$,

(2) $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -h_3(|x|)$, akkor

az origó egyenletesen aszimptotikusan stabil.

Megj: A feltételek implikálják, hogy V poz. definit és tart 0-hoz egyenletesen $t \in \mathbb{R}_+$-ban $x \mapsto 0$ esetén és $\dot{V}$ negatív definit.

Tétel: Ljapunov 3. tétele

Ha $\exists\, V \in C^1(\mathbb{R}_+ \times U, \mathbb{R})$, $0 \in U \subset X$ és $h_2, h_3 \in \mathcal{K}$ úgy, hogy $\forall\, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times U$-ra

(1) $|V(t,x)| \leq h_2(|x|)$,

(2) $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -h_3(|x|)$

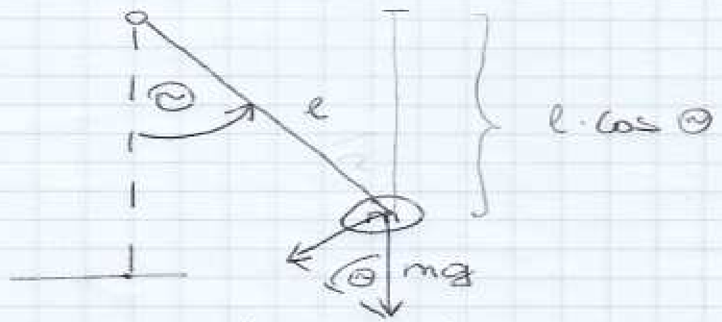
és $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}_+$ úgy hogy az origó minden $B(0,\delta)$ környezetében $\exists\, x \in B(0,\delta)$ amelyre $V(t_0, x) < 0$,

akkor az origó instabil

$\left(B(0,\delta) \overset{\text{jel}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta \}.\right)$

(A bizonyítások: Rouche - Habets - Laloy Stabilitáselmélet, A Ljapunov-féle direkt módszer, Műszaki Kiadó, Bp, 19

Pl Tekintsük a csillapított matematikai ingát!



Mozgásegyenlete: $ml\ddot{\Theta} + b\dot{\Theta} + mg\sin\Theta = 0$,

ahol m – tömeg

l – hossz

$\Theta(t)$ – kitérés szöge t időben

g – gravitációs gyorsulás (nehézségi gyorsulás)

$b > 0$ csillapítás

Cauchy normálalak az $x_1 = \Theta$, $x_2 = \dot{\Theta}$, $B = b/ml$ bevezetésével:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\Theta} = -\frac{b}{ml}\dot{\Theta} - \frac{mg}{lm}\sin\Theta = -Bx_2 - \frac{g}{l}\sin x_1$$

Ha nincs csillapítás, akkor ez egy konzervatív rsz.

Az energia a kinetikus és a potenciális energia összege:

$$W(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}mv^2(t) + mgh(t)\right) = \frac{1}{2}ml^2\underbrace{\dot{\Theta}^2(t)}_{\dot{x}_1 = x_2} + mgl(1-\cos\underbrace{\Theta(t)}_{x_1})$$

$$v(t) = l\dot{\Theta}(t) \qquad h(t) = l - l\cos\Theta(t)$$

$$w(x_1, x_2) = \frac{W(x_1, x_2)}{ml^2} = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1-\cos x_1) > 0$$

$w(x_1, x_2) \neq 0$, $|x_1| < \pi$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

$\dot{V} = \frac{1}{2} 2\dot{x}_2 x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \cdot \dot{x}_1 = \cancel{\frac{1}{2}} - Bx_2^2 - \frac{g}{l} \sin x_1 \cdot x_2 +$

$+ \frac{g}{l} \sin x_1 \cdot x_2 = -Bx_2^2$

$\dot{V}$ negatív szemidefinit. $\Rightarrow (\Theta, \dot{\Theta}) = (x_1, x_2) = (0,0)$ eh. stab
Ljap 1

Válasszunk másik Ljapunov fv-t!

$V(x_1, x_2) = x_2^2 + (Bx_1 + x_2)^2 + 4(g/l)(1-\cos x_1)$ poz def

$\dot{V}(x_1, x_2) = \dots = -2B(x_2^2 + (g/l)\, x_1 \sin x_1) < 0$

ha $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, $|x_1| < \pi$, $x_2 \in \mathbb{R}$

~~Ha B>0~~ Ljap. 2. $(0,0)$ egyens. asz. stab.

Ha $B<0$ lenne (gerjesztett eset) akkor $-V$

kielégíti Ljap 3. t-t és $(0,0)$ instab.

Autonóm rsz-k stabilitása

Tek: $\dot{x} = f(x)$ (A)

$f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$, $0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ idő független

$f(0) = 0$

Tétel: (Barbashin – Krasovskij, ill. La Salle elv)

Ha $\exists\ V \in C_1(U, \mathbb{R})$, $0 \in U \subset X$ és

$h_1, h_2 \in K$ úgy, hogy

$\forall\ x \in U$-ra

(1) $h_1(|x|) \leq V(x) \leq h_2(|x|)$,

(2) $\dot{V}_{(A)}(x) \leq 0$ és

az $M = \{x \in U : \dot{V}_{(A)}(x) = 0\}$ nem tartalmaz pozitív félpályát az origón kívül, akkor

az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet

Mgj: Ha $U = \mathbb{R}^n$ és $h_1(|x|) \to \infty$ $|x| \to \infty$ akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis

Stabilitás a lineáris közelítés alapján

Tek. $\dot{x} = f(t,x)$ a korábbi tulajdonságokkal és

L: $\dot{x} = Ax + g(t,x) = f(t,x)$, ahol

A $n \times n$-es mx

$\frac{|g(t,x)|}{\|x\|} \to 0$ $x \to 0$ egyenletesen $t \in I$-re

Tétel: Ha A minden sajátértékének valós része negatív, akkor az origó egyenletesen aszimptotikusan stabilis

Tétel: Ha van A-nak pos valós részű sajátértéke, akkor instabilis

Megj: 0 valós részű sajátérték esetén kérdéses.

Ezt használjuk autonóm rsz-ek lokális stab vizsgálatára is:

$\dot{x} = f(x)$

$f(0) = 0$

Linearizálunk: $\dot{x} = Ax$

$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0$ vagyis a Jacobi mx.

Érdekes kérdés, hogy mi van akkor, ha A-nak van tiszta képzetes gyökpárja. Lehet ezt vizsgálni vmilyen paraméteres fv-ben.

• Pl. $\dot{x} = y - x(x^2+y^2-\mu)$

$\dot{y} = -x - y(x^2+y^2-\mu)$

$(0,0)$ ek $\forall\ \mu \in \mathbb{R}$-re

A linearizált: $\dot{x} = \mu x + y$

$\dot{y} = -x + \mu y$

$\lambda_{1,2}(\mu) = \mu \pm i$

$\mu < 0$-ra as. st. $\qquad$ $\mu > 0$ inst. $\qquad$ $\mu = 0$?

Polárra áttérve:

$x = r\cos\Theta$

$y = r\sin\Theta \qquad r \geq 0$

$\dot{r} = -r(r^2-\mu)$

$\dot{\Theta} = -1$

(mert $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x\dot{x}+2y\dot{y}) - \frac{1}{r}(x\dot{x}+y\dot{y}) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\cancel{xy} - x^2(x^2+y^2-\mu) - \cancel{xy} - y^2(x^2+y^2-\mu)\right) =$$

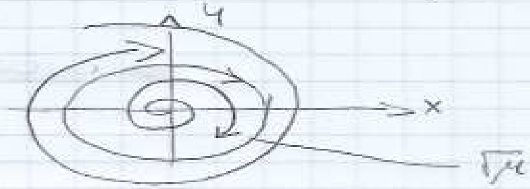
$$= \frac{1}{r}\left(-(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}-\mu)(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})\right) = r(-r^2+\mu) = -r(r^2-\mu)$$

$\Theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (\dot{y}x - \dot{x}y) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-x^2-y^2\right) = -1 \ )$$

$\mu > 0$-ra:



van periodikus pálya

Hopf-bifurkáció

Tétel: Tek. $\dot{x} = f(x, \mu)$

$f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $k \geq 4$

$f(0, \mu) \equiv 0$

TFH kis $|\mu|$-re az $f'_x(0,\mu)$-nek van egy komplex konjugált gyökpárja: $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, $\omega(\mu) > 0$, $\alpha(0) = 0$

$\alpha'(0) > 0$ (a valós rész μ szerinti deriváltja pozitív)

és a maradék $n-2$ sajátérték valós része negatív,

akkor:

(i) $\exists$ $\delta > 0$ és $\mu \in C^{k-2}((-\delta,\delta), \mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$-ra az $\dot{x} = f(x, \mu(\varepsilon))$-nak van egy periodikus megoldása: $p(t,\varepsilon)$; $T(\varepsilon) > 0$ periódussal, $T \in C^{k-2}$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = 2\pi/\omega(0)$, $p(t,0) \equiv 0$ teljesülnek és az amplitúdója ennek a periodikus pályának $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$-nal arányos (a közelítő távolsága a per. pályának az origótól)

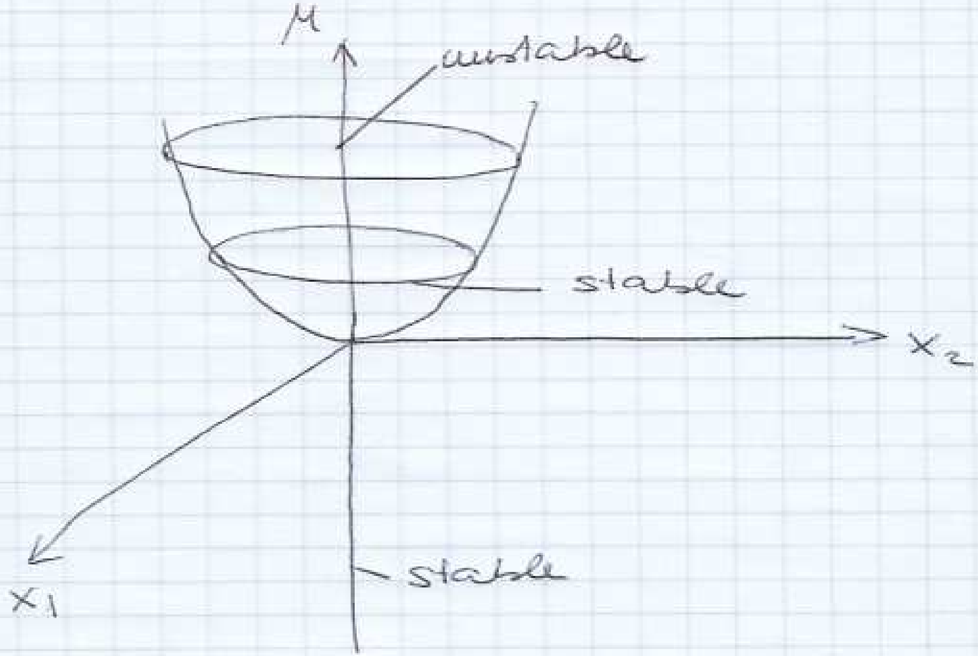
(ii) Az ~~$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$~~ $(x,\mu) = (0,0)$ origónak van egy $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ környezete, amely nem tartalmaz a $p(t,\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$-n kívül más per. pályát.

Mj: Általános esetben $\mu(\varepsilon)$ pozitív vagy negatív minden $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$, $\varepsilon \neq 0$-ra.

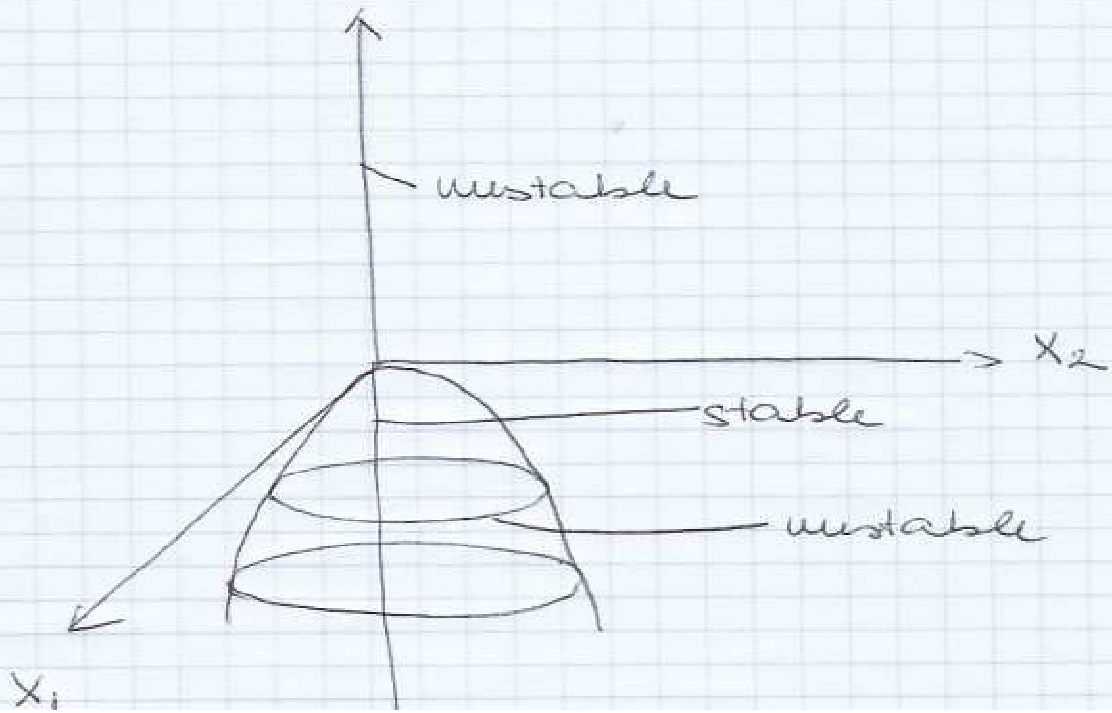
Ha $\mu(\varepsilon) > 0$ akkor szuperkritikus a bifurkáció

ha $\mu(\varepsilon) < 0$ akkor szubkritikus.

A szuperkritikus eset az ún. orbitálisan aszimptotikusan stab. per. pálya eset.



szuperkritikus eset



szubkritikus eset.