Nyolcadik A4 gyakorlat
rövid megoldási útmutató

2013. november 27.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

   Legyen a kockával dobott érték X, a fejek száma az érmedobások során pedig Y. Ha tudjuk, hogy $X = k$, akkor Y binomiális eloszlású lesz k és $\frac{1}{2}$ paraméterekkel. Ennek megfelelően:
   $\mathbf{P}(X = 4, Y = 2) = \mathbf{P}(Y = 2|X = 4)\mathbf{P}(X = 4) = \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4\frac{1}{6} = \frac{1}{16}$
   A feladat másik részéhez egy teljes valószínűség tételét használunk, ahol a teljes eseményrendszert a kockadobás értéke adja:
   $\mathbf{P}(Y = 5) = \sum_{i=1}^{6}\mathbf{P}(Y = 5|X = i)\mathbf{P}(X = i) =$ (hisz a többi 0) $= \mathbf{P}(Y = 5|X = 5)\mathbf{P}(X = 5) + \mathbf{P}(Y = 5|X = 6)\mathbf{P}(X = 6) = \binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5\frac{1}{6} + \binom{6}{5}(\frac{1}{2})^6\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0.6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0.5 valószínűséggel eladom az antikváriumban. Adjuk meg az eladott könyvek számának eloszlását!

   Legyen a levett könyvek száma X, az eladottaké pedig Y. X eloszlása binomiális 20 *és* $0,6$ *paraméterekkel. Y lehetséges értékei* $0, 1, \ldots, 20$. *Ha tudjuk, hogy $X = i$, akkor Y binomiális eloszlású lesz i és* $0,5$ *paraméterekkel.* $\mathbf{P}(Y = l)$ *meghatározásához egy teljes valószínűség tételét használunk, ahol a teljes eseményrendszert a levett könyvek száma adja:*
   $P(Y = l) = \sum_{i=0}^{20}\mathbf{P}(Y = l|X = i)P(X = i) =$ (hisz a többi 0) $= \sum_{i=l}^{20}\mathbf{P}(Y = l|X = i)P(X = i) = \sum_{i=l}^{20}\binom{20}{i}(0,6)^i(0,4)^{20-i}\binom{i}{l}(0,5)^{20}$

3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható értéke?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
   e) Független-e X és Y?

a) Kiolvasva a táblázatból - $\mathbf{P}(X = 2, Y = 1) = 0,1$

b) A megfelelő sorösszegből (igazából az X *értéke szerint bontjuk 3 diszjunk eseményre) -* $\mathbf{P}(Y = 3) = 0,1 + 0 + 0,1 = 0,2$

c) X^2Y *értékei*

$X\backslash Y$	1	2	3
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27

Ezeket az értékeket a megfelelő valószínűseégekkel összeszorozva:
$\mathbb{E}(X^2Y) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0 + 9 \cdot 0,1 + 18 \cdot 0 + 27 \cdot 0,1 = 6,7$

d) Ehhez az $Y = 3$ *értékhez tartozó oszlopot kell újranormálni az oszlopösszeggel (hogy* 1 *legyen az összeg), vagyis* $\mathbf{P}(Y = 3)$*-mal. Ennek megfelelően az eloszlásban a valószínűségek rendre* $\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

e) X *és* Y *nem független, ugyanis pl.* $0 = \mathbf{P}(X = 2, Y = 3) \neq \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 3) \neq 0$.

2. Sűrűségfüggvény a síkon

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

a) $f(x,y)$ *nem-negatív, és* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} \frac{4}{5}(x + xy + y)dxdy = \frac{4}{5}\int\limits_{0}^{1}[\frac{x^2}{2} + \frac{x^2y}{2} + yx]_0^1 dy = \frac{4}{5}\int\limits_{0}^{1}(\frac{1}{2} + \frac{y}{2} + y)dy = \frac{4}{5}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{2} + \frac{3y}{2}dy = \frac{4}{5}(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) = 1$*, tehát ez egy sűrűsségfüggvény.*

b) *Ez pont két független* λ *paraméterű exponenciális eloszlás együttes sűrűsségfüggvénye, tehát az.*

c) $f(0,0) = -10 < 0$*, tehát nem az.*

d) $f(x,y)$ *nyílván nem-negatív, és* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{x} \frac{1}{x}dydx = \int\limits_{x=0}^{1} \frac{x}{x}dx = \int\limits_{x=0}^{1} 1\,dx = 1$ *tehát ez is sűrűségfüggvény.*

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

$f(x,y)$ pontosan akkor nem-negatív, ha c nem-negatív. A másik feltétel, hogy integrálja 1, azaz $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int\limits_{y=0}^{1}\int\limits_{x=0}^{1-y} c \cdot y\, dxdy = c\int\limits_{y=0}^{1} y(1-y)\, dy = \frac{c}{6}$, amiből $c = 6$ adódik.

6. Vegyük az $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $(x, y > 0)$ sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

   a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
   b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
   c) $0 < X < 1$
   d) $3 < Y < 5$

   a) $\mathbf{P}(0 < X < 1, 0 < Y < 1) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 \lambda e^{-\lambda x}dx \cdot \int\limits_0^1 \lambda e^{-\lambda y}dy = (1 - e^{-\lambda})^2$

   b) $\mathbf{P}(1 < X < 5, 2 < Y < 8) = \int\limits_1^5\int\limits_2^8 f(x,y)dydx = \int\limits_1^5 \lambda e^{-\lambda x}dx \cdot \int\limits_2^8 \lambda e^{-\lambda y}dy = (e^{-\lambda} - e^{-5\lambda})(e^{-2\lambda} - e^{-8\lambda})$

   c) X marginális eloszlása könnyen látható, hogy $Exp(\lambda)$, hisz $f(x,y)$ két ilyen eloszlás sűrűségfüggvényének a szorzata, így $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, tehát $\mathbf{P}(0 < X < 1) = F_1(1) - F_1(0) = 1 - e^{-\lambda}$.

   d) Hasonlóan az előzőhöz $F_2(x) = 1 - e^{-\lambda y}$, tehát $\mathbf{P}(3 < Y < 5) = F_2(5) - F_2(3) = e^{-3\lambda} - e^{-5\lambda}$.

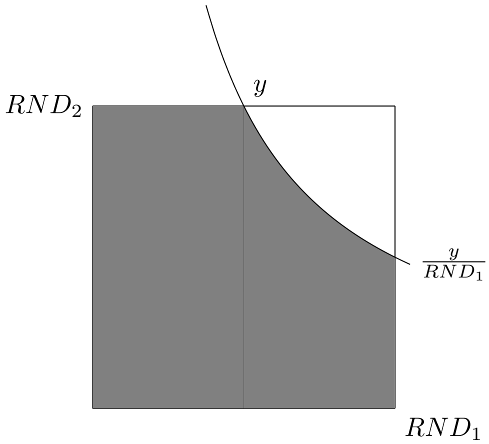
7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ és $B = \left\{Y < \frac{1}{2}\right\}$.

   a) Határozzuk meg (X, Y) eloszlásfüggvényét, majd annak segítségével a sűrűségfüggvényét!
   b) Az együttes sűrűségfüggvényből határozzuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényeit!
   c) P(A)=?
   d) P(B)=?
   e) P(A és B)=?
   f) P(A|B)=?
   g) P(B|A)=?

   $F(x, y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y)$

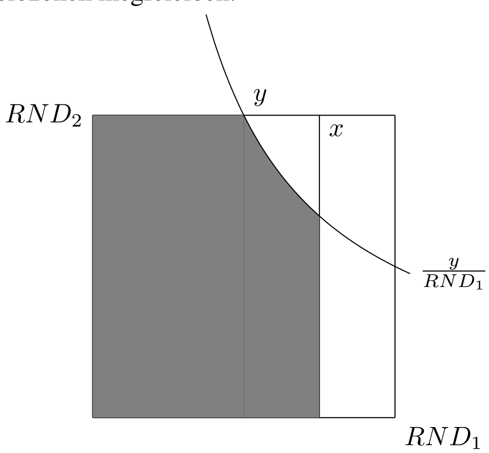
   - Ha $x \leq 0$ vagy $y \leq 0$, akkor nyilván $F(x, y) = 0$.
   - Ha $x, y \geq 1$, akkor $F(x, y) = 1$.
   - Ha $0 < x < 1$ és $y > 1$, akkor $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(X < x) = x$, hisz $X = RND_1$.
   - Vegyük észre, hogy $Y \leq X$ mindig teljesül, így ha $0 < x < y < 1$, akkor $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(X < x) = x$.

- Ha $x > 1$ és $0 < y < 1$, akkor $F(X,Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(RND_1 \cdot RND_2 < y)$. Ezt a valószínűséget geometriai úton tudjuk számolni, mégpedig úgy, hogy ábárzoljuk azon (RND_1, RND_2) pontokat az egységnégyzetben, amelyekre $RND_1 \cdot RND_2 < y$. Ezt a tartományt felülről először az $RND_2 = 1$, majd az $RND_2 = \frac{y}{RND_1}$ függvény határolja, mely az $RND_2 = 1$-et y-ban metszi.

  Területe integrálszámítással adódik:
  $\int\limits_0^y 1dt + \int\limits_y^1 \frac{y}{t}dt = y + y[\ln t]_y^1 = y + y\ln\frac{1}{y}$, vagyis $x > 1$ és $0 < y < 1$ esetén $F(X,Y) = y + y\ln\frac{1}{y}$

- Hasonlóan kell eljárni a $0 < y < x < 1$ esetben is. $F(X,Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(RND_1 < x, RND_1 \cdot RND_2 < y)$. Akárcsak előbb, most is geometriai úton számolhatunk, a kapcslódó ábra az előzőnek megfelelően:

  Ennek területe most:
  $\int\limits_0^y 1dt + \int\limits_y^x \frac{y}{t}dt = y + y[\ln t]_y^x = y + y\ln\frac{x}{y}$, vagyis $0 < y < x < 1$ esetén $F(X,Y) = y + y\ln\frac{x}{y}$

Az eloszlásfüggvényből parciális deriválásokkal adódik a sűrűségfüggvény. Minden esetben mi választhatjuk meg a deriválások sorrendjét, vagyis, hogy előbb x vagy y szerint deriválunk, ez megkönnyítheti a dogunkat. A deriválásokat elvégezve azt kapjuk $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0.

$X = RND_1$, így az ő peremsűrűségfüggvénye $f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$, egyébként 0. Y peremsűrűségfüggvénye az együttes sűrűségfüggvényből határozható meg integrálással, mégpedig $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx =$

$\int_y^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y$, ha $0 < y < 1$.

$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, hisz $X = RND_1$

$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln y dy = [y - y\ln y]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1+\ln 2}{2}$, hisz $-\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

$P(A \cap B) = \mathbf{P}(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dy dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln 2}{2}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{ln2}{1+ln2}$

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = ln2$

8. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) $P(Y < \frac{1}{4}) =?$

   c) $P(Y < y) =?$

Az $f(x,y) = f_{2|1}(y|x)f_1(x)$ összefüggést használjuk. $0 \le X <\le$, *így* $0 < x \le 1$*-re*
$F_1(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\sqrt{RND_1} < x) = \mathbf{P}(RND_1 < x^2) = x^2 \Longrightarrow f_1(x) = (x^2)' = 2x$ *ha* $0 < x < 1$ *egyébként* 0.
$Y = X \cdot RND_2$*, így az* $X = x$ *feltétel mellett* Y *egyenletes eloszlású lesz* $[0,x]$*-en, tehát* $f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x}$ *ha* $0 < y < x$ *egyébként* 0. *Összegezve azt kapjuk, hogy* $f(x,y) = 2x\frac{1}{x} = 2$ *ha* $0 < y < x < 1$*, egyébként* 0.
Y *marginális sűrűségfüggvénye* $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_y^1 2dy = 2(1-y)$ *ha* $0 < y < 1$*, egyébként* 0*, így* $\mathbf{P}(Y < y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)dt = \int_0^y 2(1-t)dt = [-(1-t)^2]_0^y = 1-(1-y)^2 = 2y - y^2$*, ha* $0 < y < 1$ *(nyilván* 0 *az értéke, ha* $y \le 0$ *és* 1*, ha* $y \ge 1$*).* $y = \frac{1}{4}$*-re az érték* $\frac{7}{16}$.

3. Kétdimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

9. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

X *ugyanaz, mint az előző feladatban, így* $f_1(x) = (x^2)' = 2x$ *ha* $0 < x < 1$ *egyébként* 0. $Y = X \cdot \sqrt{RND_2}$*, így* $0 < y < x$*-re* $F_{2|1}(y|x) = \mathbf{P}(Y < y|X = x) = \mathbf{P}(x \cdot \sqrt{RND_2} < y) = \mathbf{P}(RND_2 < (\frac{y}{x})^2) = (\frac{y}{x})^2$*, tehát* $f_{2|1}(y|x) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})^2 = \frac{2y}{x^2}$. *Összegezve* $f(x,y) = 2x\frac{2y}{x^2} = \frac{4y}{x}$*, ha* $0 < x < y < 1$*, egyébként* 0.

$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x xy\frac{4y}{x}dydx = \int_0^1\int_0^x 4y^2dydx = \int_0^1 \frac{4}{3}x^3dx = \frac{1}{3}$

$E(XY^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^2f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x xy^2 4\frac{y}{x}dydx = \int_0^1\int_0^x 4y^3dydx = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}$

4. Feltételes eloszlás

10. Legyen X a $[0,1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke?

    $f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$,egyébként 0, hisz egyenletes $[0,1]$-en. $f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{1-x}$, egyébként 0 hisz az $X = x$ feltétel mellet Y egyenletes eloszlású $[x,1]$-en. Így $f(x,y) = f_1(x)f_{2|1}(y|x) = 1 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, ha $0 < x < y < 1$, egyébként 0. X várható értéke nyilván $\frac{1}{2}$.

11. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

    a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) =?$
    b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$
    c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$
    d) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.1) =?$
    e) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.4) =?$
    f) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = y) =?$

    A feltételes sűrűségfüggvények:
    $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int\limits_0^x \frac{1}{x}dy = 1 \Longrightarrow f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{x}$
    $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int\limits_y^1 \frac{1}{x}dx = -\ln y \Longrightarrow f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = -\frac{1}{x \ln y}$
    $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) = \int\limits_{0.3}^{0.4} f_{2|1}(y|x)dy = \int\limits_{0.3}^{0.4} \frac{1}{x}dy = \frac{1}{10x}$
    Konkrét x érékek esetén csak be kell helyettesíteni.
    $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = y) = \int\limits_{0.5}^{0.7} f_{1|2}(x|y)dx = \int\limits_{0.5}^{0.7} -\frac{1}{x \ln y}dx = -\frac{1}{\ln y}[\ln x]_{0.5}^{0.7} = -\frac{\ln \frac{7}{5}}{\ln y}$
    Konkrét y érékek esetén csak be kell helyettesíteni.

12. Legyen X a Duna mai bécsi vízállása, Y pedig legyen a holnaputáni budapesti vízállás. Statisztikai megfigyelések alapján (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{6}{5}\left(x + (y-1)^2\right)$ ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként 0. A mért bécsi vízállás ismeretében adjuk meg annak a valószínűségét, hogy holnapután Budapesten alacsony vagyis $\frac{1}{2}$-nél kisebb vízállás lesz! (Az adatok nem valósak, továbbá feltesszük, hogy a vízállást egy 0 és 1 közötti szám jellemzi)

    $X = x$ feltétel mellett Y sűrűségfüggvénye:
    $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 \frac{6}{5}(x + (y-1)^2)dy = \frac{6}{5}[xy + \frac{(y-1)^3}{3}]_0^1 = \frac{6}{5}(x + \frac{1}{3}) \Longrightarrow f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{x+(y-1)^2}{x+\frac{1}{3}}$
    $\mathbf{P}(Y < \frac{1}{2}|X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{2|1}(y|x)dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+(y-1)^2}{x+\frac{1}{3}}dy = \frac{1}{x+\frac{1}{3}}[xy + \frac{(y-1)^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{x}{2}+\frac{7}{24}}{x+\frac{1}{3}}$

13. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

    a) $P(X + Y < 3) =?$
    b) $P(X + Y < z) =?$
    c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$
    d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$

$f_1(x) = 2e^{-2x}$, ha $x > 0$ és $f_2(y) = 2e^{-2y}$, ha $y > 0$, hisze exponenciális eloszlásúak, és a függetlenség miatt $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$, ha $x, y > 0$.

$\mathbf{P}(X + Y < z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dydx = \int\limits_{0}^{z}\int\limits_{0}^{z-x} 4e^{-2(x+y)}dydx = \int\limits_{0}^{z} 4e^{-2x}[\frac{e^{-2y}}{-2}]_0^{z-x}dx = \int\limits_{0}^{z} 2(e^{-2x} - e^{-2z})dx = [-e^{-2x} - 2e^{-2z}x]_0^z = 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z} = 1 - (2z + 1)e^{-2z}$

$z = 3$-ra csak ebbe kell behelyettesíteni.

$\mathbf{P}(X + Y < 3|X < 2) = \frac{\mathbf{P}(X+Y<3, X<2)}{\mathbf{P}(X<2)}$

$\mathbf{P}(X+Y < 3, X < 2) = \int\limits_{-\infty}^{2}\int\limits_{-\infty}^{3-x} f(x, y)dydx = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{3-x} 4e^{-2(x+y)}dydx = \int\limits_{0}^{2} 4e^{-2x}[\frac{e^{-2y}}{-2}]_0^{3-x}dx = \int\limits_{0}^{2} 2(e^{-2x} - e^{-6})dx = [-e^{-2x} - 2e^{-6}x]_0^2 = 1 - e^{-4} - 4e^{-6} \Longrightarrow \mathbf{P}(X + Y < 3|X < 2) = \frac{1-e^{-4}-4e^{-6}}{1-e^{-4}}$

$\mathbf{P}(2 < X + Y < 3|Y > 1) = \frac{\mathbf{P}(2<X+Y<3, Y>1)}{\mathbf{P}(Y>1)}$

Felrajzolva, hogy hol kell integrálni:

$\mathbf{P}(2 < X + Y < 3, Y > 1) = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2-x}^{3-x} 4e^{-2(x+y)}dydx + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{1}^{3-x} 4e^{-2(x+y)}dydx = \int\limits_{0}^{1} 4e^{-2x}[\frac{e^{-2y}}{-2}]_{2-x}^{3-x}dx + \int\limits_{1}^{2} 4e^{-2x}[\frac{e^{-2y}}{-2}]_1^{3-x}dx = \int\limits_{0}^{1} 2(e^{-4} - e^{-6})e^{-2x}dx + \int\limits_{1}^{2} 2(e^{-2}e^{-2x} - e^{-6})dx = (e^{-4} - e^{-6})[-e^{-2x}]_0^1 + [-e^{-2}e^{-2x} - 2e^{-6}x]_1^2 = 2e^{-4} - 5e^{-6} + e^{-8}$ (lehet, hogy el van számolva) $\Longrightarrow \mathbf{P}(2 < X + Y < 3|Y > 1) = \frac{2e^{-4}-5e^{-6}+e^{-8}}{1-(1-e^{-2})}$

5. Függetlenség

14. Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$

b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$

c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$

d) $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

a) Korábbi feladatokban már számoltuk, hogy $f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$ és $f_2(y) = -\ln y$, ha $0 < y < 1$. Nyilván $f_1(x)f_2(y) \neq f(x, y)$, így nem függetlenek.

b) $f_1(x) = \int\limits_{0}^{x} 2dy = 2x$, ha $0 < x < 1$

$f_2(y) = \int\limits_{y}^{1} 2dy = 2(1 - y)$, ha $0 < y < 1$

Nyilván $f_1(x)f_2(y) \neq f(x, y)$, így nem függetlenek.

Az előző két esetben az, hogy nem függetlenek abból is látszott, hogy az együttes sűrűségfüggvény tartója nem "téglalap" alakú volt.

c) $f_1(x) = \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2}dy = 1$, ha $0 < x < 1$

$f_2(y) = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}$, ha $0 < y < 2$

Nyilván $f_1(x)f_2(y) = f(x, y)$, tehát függetlenek.

d) Ez nem sűrűségüggvény.

15. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 24xy \text{ , ha } \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

Nem lehetnek függetlenek, mert $f(x,y)$ tartója nem téglalap alakú. (Olyan x és y értékekre, amelyekre $0 < x, y < 1$ de $x + y > 1$, $f(x,y) = 0$, holott ezekre az értékekre sem $f_1(x)$, sem $f_2(y)$ nem 0, így $f_1(x)f_2(y) = f(x,y)$ nem állhat fenn.)
Mivel $u, v > 0$ és $u + v < 1$ ezért egy szép tartományon kell integrálni:
$P(X < u, Y < v) = \int_0^u \int_0^v 24xydydx = 24 \int_0^u xdx \int_0^v ydy = 6x^2y^2$

16. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 1 \text{ , ha } \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$

b) Független-e X és Y?

A tartó alakjából megint látszik, hogy nem függetlenek.
$P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2})$ most nem más, mint a megfelelő tartomány területe, hiszen az 1 függvényt kellene ezen integrálni. Felrajzolva a feltételt teljesítő (x,y) pontokat a sűrűségfüggvény tartóján, azt kapjuk, hogy ha $x < \frac{1}{4}$, akkor ez a tartomány egy téglalap, melynek területe $\frac{x}{2}$, ha $x > \frac{1}{2}$, akkor ez a tartomány egy trapéz, melynek területe $\frac{3}{16}$ és ha $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, akkor ez a tartomány az előbbi trapéz mínusz egy háromszog, és területe $\frac{3}{16} - \frac{(\frac{1}{2}-x)(1-2x)}{2} = \frac{3}{16} - (\frac{1}{2} - x)^2$