

# Villamosmérnök A4 — 11. hét

## Kétdimenziós normális eloszlás, cht

### Kétdimenziós normális összefoglalás

Egy kétdimenziós  $(X, Y)$  valószínűségi változó **kovariancia mátrixa**:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

**Korrelációs együttható:**  $r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{SD}(X)\mathbb{SD}(Y)}$ .

**Kétdimenziós normális eloszlás:** Standard kétdimenziós normális eloszlású egy  $(U, V)$  pár, ha sűrűségfüggvénye

$$\varphi(u, v) := \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

$(U, V)$  zérus várható érték vektorú, egységmátrix kovarianciájú pár. Azt mondjuk, hogy az  $(X, Y) = (U, V)\mathbf{A} + \mu$  pár kétdimenziós normális eloszlású  $\mu \in \mathbb{R}^2$  várható érték vektorral és  $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  (invertálható) kovariancia mátrixszal, ha  $(U, V)$  standard normális pár, és  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \Sigma$ , ahol  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Egy kétdimenziós normális  $(X, Y)$  pár sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2r\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right]\right\},$$

ahol  $\mathbb{E}X = \mu_X$ ,  $\mathbb{E}Y = \mu_Y$ ,  $\mathbb{SD}(X) = \sigma_X$ ,  $\mathbb{SD}(Y) = \sigma_Y$ , és  $r = r(X, Y)$   $X$  és  $Y$  korrelációs együtthatója. Kétdimenziós normális eloszlás esetében a perem- illetve feltételes eloszlások is normálisok: a marginálisok eloszlása  $N(\mu_X, \sigma_X)$  és  $N(\mu_Y, \sigma_Y)$ , a feltételes eloszlások pedig  $N(\mu_{X|Y=y}, \sigma_{X|Y=y})$ , ahol

$$\mu_{X|Y=y} = \mu_X + (y - \mu_Y) r \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \quad \text{és} \quad \sigma_{X|Y=y} = \sqrt{1 - r^2} \sigma_X.$$

### Kétdimenziós normális feladatok

- Tegyük fel, hogy egy jólmenő étterem heti összbevétele normális eloszlást követ 1 millió forint várható haszonnal, és 700000 forint szórással. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 1.5 millió forint a bevétel két, egymást követő héten? Itt tegyünk még fel függetlenséget! Majd nézzük meg, hogyan változik annak a valószínűsége, hogy a második héten több mint 2 millió forint a bevétel feltéve, hogy az első héten 1.5 millió forint volt a bevétel és a korreláció  $-0.5$ ! Mi a második hét várható bevételé ugyanezen feltétel mellett? Mennyi a két hét várható összbevétele? Mi a szórás?
- Budapesten májusban az átlagos hőmérséklet  $25^\circ\text{C}$ ,  $7^\circ\text{C}$  szórással, valamint az átlagnyomás  $10^5$  Pa,  $2 \times 10^4$  Pa szórással. A hőmérséklet/nyomás változása szoros összhangban van, köztük lévő korreláció  $0.7$ . Írjuk fel a kovariancia mátrixot majd határozzuk meg a következőket:
  - Mi a valószínűsége annak, hogy egy nap melegebb lesz, mint  $40^\circ\text{C}$ ? És, hogy alacsonyabb a nyomás  $6 \times 10^4$  Pa-nál?
  - Egy nap  $20^\circ\text{C}$ -ot mértünk. Mi annak a valószínűsége, hogy a légnyomás  $1.2 \times 10^5$  Pa fölött járt? Átlagosan mekkora volt a légnyomás? Mekkora a szórás?
  - Feltéve, hogy egy nap  $10^5$  Pa volt a légnyomás, mi annak a valószínűsége, hogy melegebb volt, mint  $35^\circ\text{C}$ ? Átlagosan hány fok volt aznap? Mekkora a szórás?
- Magyarországon a felnőtt férfiak testmagassága átlagosan 178 cm, 9 cm szórással, míg testsúlyuk 85 kg, 10 kg szórással. A korrelációs együttható  $0.7$ , azaz minél magasabb valaki, annál súlyosabb is. Írjuk fel a kovariancia mátrixot!
  - Mi a valószínűsége annak, hogy egy férfi magasabb 2 méternél? És, hogy nehezebb 100 kg-nál?
  - Feltéve, hogy egy férfi 80 kg, mi annak a valószínűsége, hogy magasabb, mint 180 cm? Várhatóan hány cm magas egy ilyen férfi? Mekkora a szórás?
  - Átlagosan mekkora súlyú egy 190 cm magas férfi?
  - Átlagosan milyen magas egy 94.3 kg-os férfi?
  - Hasonlítsuk össze az utolsó két eredményt.
- Az  $X$  áramerősség normális  $N(230, 6)$  eloszlású, a mérőkészülék  $Z$  hibája ettől független  $N(0, 8)$  eloszlású, mi az  $Y = X + Z$  értéket mérjük. Mi a valószínűsége, hogy  $Z > X/20$ ?
- Legyen a  $(X, Y)$  pár kétdimenziós normális eloszlású,  $r$  korrelációval. Mi az eloszlása  $U = X + Y$ -nak és  $V = X - Y$ -nak? Független-e  $U$  a  $V$ -től? Számoljuk ki a várható értékeket és szórásokat is!

6. Hogyan generálna le kétdimenziós normális eloszlású véletlen pontokat a síkon, melyek várható értéke  $(\mu_1, \mu_2)$ , szórása  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , korrelációs együtthatója pedig  $r$ . Függetlenek-e a koordináták, ha  $r = 0$ ?

### CHT

**Centrális határeloszlás-tétel (CHT):** legyenek  $X_1, X_2, \dots$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók,  $\mu := \mathbb{E}X_i \in \mathbb{R}$  és  $\sigma := \mathbb{SD}(X_i) \in \mathbb{R}^+$ . Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x), \text{ amint } n \rightarrow +\infty, (x \in \mathbb{R}).$$

Mindez szóban: elég nagy  $n$  esetén a –FAE– valószínűségi változók standardizált összege közelítőleg (standard) normális eloszlású. Speciálisan: ha az  $X_i$  változókat azonos,  $p$  paraméterű Bernoulli változóknak választjuk, akkor jutunk el a de Moivre–Laplace tételhez (avagy binomiális CHT).

7. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12 000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?
8. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: Feldobjuk az érmét 1000-szer. Ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?
9. Határozzuk meg azt a  $k$  egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmédobás során a fejek száma  $500 - k$  és  $500 + k$  közé esik, kb. 0.9.
10. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a  $[0, 30]$  intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a  $[0, 1]$  intervallumon
- (a) egyenletes;
- (b)  $f(x) = 2x$  sűrűségfüggvény szerint alakul?
11. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik.
12. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.
13. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kieggett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.
14. A jegyiroda előtt a fiatalok hosszú sorban állnak egy koncertjegyért. Ebben a pillanatban éppen 18-an állnak az egyik pénztár előtt. Megfigyeltem, hogy egy vásárló kiszolgálási ideje memória nélküli valószínűségi változó 3 perc átlaggal és a kiszolgálási idők függetlenek. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy a most utolsóként álló fiatal több mint 60 percet fog a pénztár előtt eltölteni!
15. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és  $X$ -szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy  $X = 20$
- a binomiális eloszlás segítségével,
  - a deMoivre–Laplace-tételt használva. Ez utóbbihoz segítség:  $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \leq X < 20.5\}$ , ami persze nem számít amíg  $X$ -et binomiálisnak (azaz egész értékűnek) tekintjük, de fontos lesz a deMoivre–Laplace-tétel alkalmazásánál.