Matematika A4
IX. gyakorlat

1. Várható érték és szórás tulajdonságai

1. Számítsd ki a binomiális eloszlás szórását!

2. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozd meg $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$ értékét!

3. Legyenek X és Y független és azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Szamold ki az $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

4. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

5. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x|+|y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

2. Kovariancia és korreláció

6. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

7. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

8. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\, \mathrm{e}^{-(y + x/y)} & \text{, ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy **Cov**$(X,\, Y) = 1$.

9. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

10. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki **Cov**$(X,\, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

11. Ha $X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

(a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

(b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

korrelációs együtthatóját.

12. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszák: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 1 & \text{, ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

13. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\varrho(X, Y) = \begin{cases} +1 & \text{, ha } a > 0, \\ -1 & \text{, ha } a < 0. \end{cases}$$

14. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$?

15. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\varrho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

16. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

17. Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1 - p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

    (a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

    (b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az X_i, X_j, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)