Matematika A4
IX. gyakorlat megoldás

1. Várható érték és szórás tulajdonságai

1. Számítsd ki a binomiális eloszlás szórását!

   Megoldás: A sok lehetséges módszer közül itt egy több esetben is alkalmazhatóval számolunk. Először is meg kell határoznunk a
   $$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i p^i(1-p)^{n-i}$$
   összeget. Ennek céljából i*-t* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^i\mid_{t=1}$ *alakba írjuk, hisz* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^i=it^{i-1}$*, tehát* $t=1$ *helyettesítéssel* i*-t kapunk. Felhasználva a derivált linearitását és a binomiális tételt,*
   $$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^i\mid_{t=1}p^i(1-p)^{n-i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^ip^i(1-p)^{n-i}\right)\Bigg|_{t=1}=$$
   $$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tp+1-p)^n\mid_{t=1}=n(tp+1-p)^{n-1}\cdot p\mid_{t=1}=np.$$
   A szórásnégyzet meghatározásához szükségünk van a második momentumra is. A fent leírt trükköt, most az $i(i-1)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}t^i\mid_{t=1}$ *formában tudjuk alkalmazni. Így*
   $$\mathbb{E}[X(X-1)]=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i(i-1)\cdot p^i(1-p)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}t^i\mid_{t=1}p^i(1-p)^{n-i}=$$
   $$=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^ip^i(1-p)^{n-i}\right)\Bigg|_{t=1}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(tp+1-p)^n\mid_{t=1}=$$
   $$=n(n-1)(tp+1-p)^{n-2}\cdot p^2\mid_{t=1}=n(n-1)p^2.$$
   Így
   $$\mathbb{D}^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2=\mathbb{E}(X^2-X)+\mathbb{E}(X)-[\mathbb{E}(X)]^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p).$$
   Azaz $\mathrm{D}(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

2. Ha $\mathbb{E}(X)=1$ és $\mathbb{D}^2(X)=5$, határozd meg $\mathbb{E}[(2+X)^2]$ értékét!

   Megoldás:
   $$\mathbb{E}[(2+X)^2]=\mathbb{E}(4+4X+X^2)=\mathbb{E}(4)+\cdot\mathbb{E}(4X)+\mathbb{E}(X^2)=$$
   $$=4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2=4+4\cdot 1+5+1^2=14.$$
   A feladat megoldása során használtuk a várható érték linearitását és egyéb tulajdonságait.

3. Legyenek X és Y független és azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Szamold ki az $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ értékét.

   Megoldás:
   $$\mathbb{E}[(X-Y)^2]=\mathbb{E}[X^2-2XY+Y^2]=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(2XY)+\mathbb{E}(Y^2)=$$
   $$=\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2+2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+\mathbb{D}^2(Y)+[\mathbb{E}(Y)]^2=2(\sigma^2+\mu^2)-2\cdot\mu^2=2\sigma^2.$$

A megoldás során itt is használtuk a várható érték linearitását, illetve azt, hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával.

4. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

Megoldás: Jelölje Y a zsebemben lévő aprópénzem értékét, és X_i a zsebemben lévő i forintos érmék számát, $i = 5, 10, 20, 50, 100$. A szöveg alapján X_i Poisson eloszlást követ. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(5X_5 + 10X_{10} + 20X_{20} + 50X_{50} + 100X_{100}) = \\ &= \mathbb{E}(5X_5) + \mathbb{E}(10X_{10}) + \mathbb{E}(20X_{20}) + \mathbb{E}(50X_{50}) + \mathbb{E}(100X_{100}) = \\ &= 5\mathbb{E}(X_5) + 10\mathbb{E}(X_{10}) + 20\mathbb{E}(X_{20}) + 50\mathbb{E}(X_{50}) + 100\mathbb{E}(X_{100}) = \\ &= 5\lambda + 10\lambda + 20\lambda + 50\lambda + 100\lambda = 185\lambda.\end{aligned}$$

Itt ismét a várható érték linearitását hasznéltuk. A szórás kiszámításához először a szórásnégyzetet számoljuk ki.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Y) &= \mathbb{D}^2(5X_5 + 10X_{10} + 20X_{20} + 50X_{50} + 100X_{100}) = \\ &= \mathbb{D}^2(5X_5) + \mathbb{D}^2(10X_{10}) + \mathbb{D}^2(20X_{20}) + \mathbb{D}^2(50X_{50}) + \mathbb{D}^2(100X_{100}) = \\ &= 5^2\mathbb{D}^2(X_5) + 10^2\mathbb{D}^2(X_{10}) + 20^2\mathbb{D}^2(X_{20}) + 50^2\mathbb{D}^2(X_{50}) + 100^2\mathbb{D}^2(X_{100}) = \\ &= 5^2\lambda + 10^2\lambda + 20^2\lambda + 50^2\lambda + 100^2\lambda = 13025\lambda.\end{aligned}$$

Így $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{13025\lambda}$. Itt a megoldás során felhasználtuk a szórásnégyzetre vonatkozó tulajdonságot független valószínűségi változók esetén.

5. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x|+|y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

Megoldás: A feladat szövege alapján a baleset helye modellezhető egy (X, Y) párral, melyek együttes eloszlása egyenletes a $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ négyzeten, azaz az együttes sűrűségfüggvény itt $\frac{1}{3^2}$, egyébként zérus és az is rögtön adódik (mivel téglalapon vagyunk), hogy X és Y (a marginálisok) függetlenek egymástól, mindkettő egyenletes eloszlású a $[-1.5, 1.5]$ intervallumon. Azaz a betegszállítás várható hossza:

$$\mathbb{E}(|X| + |Y|) = \mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|Y| = 2\mathbb{E}|X| = 2\int_{-1.5}^{1.5} |x|\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}1.5 \times 1.5 = \frac{3}{2} = 1.5,$$

utóbbi levezetésben rendre a következőket használtuk: a várható érték lineáris (összeg várható értéke a várható értékek összege), X és Y azonos eloszlású (a függetlenség itt nem kell, az ahhoz kellett, hogy X és Y is egyenletes).

2. Kovariancia és korreláció

6. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

Megoldás: A kovarianciához kellenek a várható értékek, ezért ezekkel kezdjük:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x\,60xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x^2 \int_{y=0}^{1-x} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x^2\frac{(1-x)^3}{3}\,\mathrm{d}x = \\ &= 20\int_{x=0}^{1}(-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = 20\left(-\frac{1}{6} + 3\frac{1}{5} - 3\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} y\,60xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x\int_{y=0}^{1-x} y^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x\frac{(1-x)^4}{4}\,\mathrm{d}x = \\ &= 15\int_{x=0}^{1}(x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x)\,\mathrm{d}x = 15\left(\frac{1}{6}-4\frac{1}{5}+6\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} xy\,60xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x^2\int_{y=0}^{1-x} y^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 60x^2\frac{(1-x)^4}{4}\,\mathrm{d}x = \\ &= 15\int_{x=0}^{1}(x^6-4x^5+6x^4-4x^3+x^2)\,\mathrm{d}x = 15\left(\frac{1}{7}-4\frac{1}{6}+6\frac{1}{5}-4\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Azaz $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\frac{1}{2} = -\frac{1}{42}$.

7. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

Megoldás: Ismét a várható értékek meghatározásával kezdjük a feladatot:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{x} x\,\frac{2}{x}e^{-2x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} 2xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \\ &\underset{\textit{parc. int.}}{=} \left[-xe^{-2x}\right]_{x=0}^{+\infty} + \int_{x=0}^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 0 + \left.\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{x} y\,\frac{2}{x}e^{-2x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{x} xy\,\frac{2}{x}e^{-2x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \\ &\overset{\textit{parc. int.}}{=} \left[\frac{-x^2}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{+\infty} + \int_{x=0}^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ebből a kovariancia $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

8. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)} & \text{, ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\,Y) = 1$.

Megoldás: Ismét a várható értékek meghatározásával kezdjük a feladatot:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=0}^{+\infty} x\,\frac{1}{y}e^{-y-x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}y\,\mathrm{d}y = \ldots = 1.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=0}^{+\infty} y\,\frac{1}{y}e^{-y-x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}y\,\mathrm{d}y = \ldots = 1.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=0}^{+\infty} xy\,\frac{1}{y}e^{-y-x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}y^2\,\mathrm{d}y = \ldots = 2.$$

Így a kovariancia: $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 2 - 1\times 1 = 1$. *(Itt az integrálásokat parciális integrálással végeztük.)*

9. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

   Megoldás: A feladat megoldásának a kulcsa az, hogy az $X|Y = j$ feltételes eloszlás binomiális $n-j$, illetve $p = \frac{1}{5}$ paraméterrel (ahol $0 \le j \le n$ egy rögzített természetes szám). Ennek a várható értéke tehát: $np = \frac{n-j}{5}$. Illetve a marginálisok is binomiális eloszlásúak n, illetve $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel. Azaz $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{n}{6}$, $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y) = n \times \frac{1}{6}\frac{5}{6}$ és $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 = n \times \frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{n^2}{6^2} = \frac{25}{6}$. Azaz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i,j=0}^{n} ij\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=0}^{n} j\left[\sum_{i=0}^{n-j} i\mathbb{P}(X=i \,|\, Y=j)\right]\mathbb{P}(Y=j) = \\ &= \sum_{j=0}^{n} j\frac{n-j}{5}\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{n} j(n-j)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{n}{5}\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{5}\mathbb{E}(Y^2) = \\ &= \frac{n}{5}\times\frac{n}{6} - \frac{1}{5}\frac{5n+n^2}{36} = \frac{1}{36}(n^2-n),\end{aligned}$$

   ahol kihasználtuk az XY valószínűségi változó várható értékére vonatkozó képletet, a feltételes eloszlás definícióját. Vagyis:

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{36}(n^2-n) - \frac{n^2}{6^2} = -\frac{n}{36},$$

   azaz negatívan korrelált X és Y, ami intuitíve világos is, hiszen minél több a 2-es dobások száma, annál kevesebb 1-es dobást látunk nagy valószínűséggel. Azaz a korrelációs együttható:

$$r(X,Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)} = \frac{-\frac{n}{36}}{\frac{5n}{36}} = -\frac{1}{5}.$$

10. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki **Cov**(X, Y)-t. Függetlenek-e X és Y?

    Megoldás: Először itt is a várható értékek kiszámolásával kezdjük:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=2}^{12} i\mathbb{P}(X=i) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + \cdots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7,$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=-5}^{5} i\mathbb{P}(Y=i) = -5\cdot\frac{1}{36} + (-4)\cdot\frac{2}{36} + (-3)\cdot\frac{3}{36} + \cdots + 4\cdot\frac{2}{36} + 5\cdot\frac{1}{36} = 0,$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} ij\mathbb{P}(X=i, Y=j) = 0$$

    Ez utóbbi számolásban kihasználtuk azt a szimmetriát, hogy minden tag pozitív és negatív alakban is előfordul az összegben, így végül 0- tkapunk a várható értékre. Így **Cov**$(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$. *Ugyanakkor X és Y nem lesznek függetlenek, mert például $\mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{5}{36}$, míg $\mathbb{P}(X=3, Y=-1) = \frac{1}{36}$. Azaz nem teljesül a $\mathbb{P}(X=3)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X=3, Y=-1)$ azonosság. Tehát ha két változó kovarianciája 0, az még nem jelenti azt, hogy ezek a változók függetlenek.*

11. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

    (a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

    (b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

    korrelációs együtthatóját.

    Megoldás: A kovariancia linearitását használjuk mindkét esetben:

(a) $\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \mathbf{Cov}(X_1, X_2) + \mathbf{Cov}(X_1, X_3) + \mathbf{Cov}(X_2, X_2) + \mathbf{Cov}(X_2, X_3) = 0 + 0 + \mathbb{D}^2(X_2) + 0 = 1$, *mivel páronként korrelátlanok voltak az* X_i*'k és* 1 *volt a szórásuk. Emellett* $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) = 1 + 1 = 2$, $\mathbb{D}^2(X_2 + X_3) = \mathbb{D}^2(X_2) + \mathbb{D}^2(X_3) = 1 + 1 = 2$. *Tehát*

$$r(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)}{\mathbb{D}(X_1 + X_2) \cdot \mathbb{D}(X_2 + X_3)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Hasonlóan az előbbiekhez, használva a kovariancia linearitását: $\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = \mathbf{Cov}(X_1, X_3) + \mathbf{Cov}(X_1, X_4) + \mathbf{Cov}(X_2, X_3) + \mathbf{Cov}(X_3, X_4) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. *Azaz ekkor* $r(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = 0$.

12. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszák: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 1 & \text{, ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

Megoldás: A pozitív korreláltsághoz az kell, hogy a változóink kovarianciája pozitív legyen. Ezt fogjuk tehát meghatározni. Ehhez szokás szerint ki kell számolnunk a megfelelő várható értékeket:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(\textit{A nyer}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\textit{A nem nyer}) = \sum_{i=0}^{6} \mathbb{P}(\textit{A nyer}|\textit{Bank i-t dob}) \cdot \mathbb{P}(\textit{Bank i-t dob}) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{36}.$$

Szimmetriai okok miatt $\mathbb{E}(Y) = \frac{15}{36}$ *is teljesül. Illetve*

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot \mathbb{P}(\textit{A nyer, és B nyer}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\textit{A nem nyer vagy B nem nyer}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{6} \mathbb{P}(\textit{A nyer, és B nyer}|\textit{Bank i-t dob}) \cdot \mathbb{P}(\textit{Bank i-t dob}) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{55}{216}.$$

A számolások során a Bank által dobott értékre használtuk a Teljes Valószínűség Tételét. Ezek alapján

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{55}{216} - \frac{15}{36} \cdot \frac{15}{36} = \frac{305}{1296}.$$

Ezzel pedig beláttuk, hogy a változók valóban pozitívan korreláltak, ami azt jelenti, hogy feltéve, hogy az egyik játékos nyert, az csak növeli az esélyét annak, hogy a második játékos is nyerni fog.

13. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$r(X, Y) = \begin{cases} +1 & \text{, ha } a > 0, \\ -1 & \text{, ha } a < 0. \end{cases}$$

Megoldás: Először itt is a $\mathbf{Cov}(X, Y)$ *mennyiséget kell kiszámolnunk. Használva a kovariancia linearitását kapjuk, hogy*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, aX + b) = \mathbf{Cov}(X, aX) + \mathbf{Cov}(X, b) = a\mathbf{Cov}(X, X) + 0 = a\mathbb{D}^2(X).$$

A szórásnégyzet tulajdonságai alapján: $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(aX + b) = a^2\mathbb{D}^2(X)$, *azaz* $\mathbb{D}(aX + b) = |a|\mathbb{D}(X)$. *Ezek alapján*

$$r(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)} = \frac{a\mathbb{D}^2(X)}{\mathbb{D}(X) \cdot |a|\mathbb{D}(X)} = \frac{a}{|a|}.$$

Ezt pedig pontosan azt adja, amit a feladatban be kellett látni.

14. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z,\, Z^2)$?

Megoldás: A feladat megoldásában felhasnzáljuk, hogy ismerjük a normális eloszlású valószíűségi változtó minden páratlan momentuma 0 *(azaz* $\mathbb{E}(X^k) = 0$*, ha* k *páratlan). Így*

$$\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = \mathbb{E}(Z \cdot Z^2) - \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}Z^3 - \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Z^2) = 0 - 0 \cdot (1 - 0) = 0.$$

15. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$r(Y,\, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

Megoldás: Itt ismét először a $\mathbf{Cov}(Y, Z)$ *mennyiséget kell kiszámolnunk. Használva a kovariancia linearitását, illetve az előtő feladat eredményét kapjuk, hogy*

$$\mathbf{Cov}(Y, Z) = \mathbf{Cov}(a + bZ + cZ^2, Z) = \mathbf{Cov}(a, Z) + \mathbf{Cov}(bZ, Z) + \mathbf{Cov}(cZ^2, Z) =$$
$$= 0 + b\mathbf{Cov}(Z, Z) + c\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b\mathbb{D}^2(Z) + c\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b + c \cdot 0 = b$$

A szórásnégyzet tulajdonságai alapján:

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(a + bZ + cZ^2) = b^2\mathbb{D}^2(Z) + c^2\mathbb{D}^2(Z^2) + 2bc\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b^2 + c^2 \cdot 2.$$

Ugyanis $\mathbb{D}^2(Z^2) = \mathbb{E}(Z^4) - [\mathbb{E}(Z^2)]^2 = 3 - 1 = 2$*, ahol ismét használtuk, hogy standard normális eloszlás negyedik momentuma* 3*. Így* $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{b^2 + 2c^2}$*. Ezek alapján*

$$r(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(Y) \cdot \mathbb{D}(Z)} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

Ezt pedig pontosan azt adja, amit a feladatban be kellett látni.

16. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

Megoldás: Tudjuk, hogy $X = 0, 1, 2, 3$ *és* $Y = 0, 1, 2, 3$ *értékek lehetségesek, ahol* $X + Y = 3$ *teljesül, különben más együttes értékek esetén az együttes valószínűség* 0 *lesz. Emellett ismertek a következő valószínűségek:* $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{8}$ *és* $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{8}$*. Ezek alapján*

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} ij\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \sum_{i,j} i^2j^2\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 0^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3,$$

$$\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{E}(X^2Y^2) - [\mathbb{E}(XY)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Így $\mathbb{D}(XY) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1 - p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

    (a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

    (b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i,\, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az $X_i,\ X_j$, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)