Matematika A4
X. gyakorlat

1. Várható érték és szórás tulajdonságai

1. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozd meg $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$ értékét!

2. Legyenek X és Y független és azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Szamold ki az $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

3. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

4. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x|+|y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát. Hogyan változik az eredmény, ha a távolság négyzetével arányos hosszú utat kell megtennie a mentőnek?

5. Magyarországon egy ember egy véletlen $\sqrt{Z}$ ideig él, ahol Z exponenciális eloszlású valószínűségi változó valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. Mi λ értéke, ha átlagosan 67 évig élünk?

6. Egy gyárban két gép egymás mellett működik, de egyik üzemelése vagy épp nem üzemelése sem befolyásolja a másik működését vagy épp nem működését. Mindkettő exponenciális ideig él, és az esetek 90%-ában több, mint 1000 órát üzemelnek.
   (a) Várhatóan meddig lesz üzemképes mindkét gép?
   (b) Várhatóan meddig fog üzemelni legalább az egyik gép?
   (c) A két gép együttesen átlagosan hány órát üzemel?

7. Legyenek X és Y független valoszínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, de egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk megbecsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést adjuk, valamilyen $0 < \lambda < 1$ parameterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen?

2. Kovariancia és korreláció

8. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

9. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

10. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)} & \text{, ha } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\,Y) = 1$.

11. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:

    (a) $\rho(X,Y)$, $D(X+Y)$, $D(2X-3Y)$;

    (b) $E(X-3Y)^2$, $E(XY+Y^2)$;

    feltéve, hogy $Cov(X,Y)=2$, $D(X)=3$, $D(Y)=4$, $E(X)=-1$, $E(Y)=1$

12. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

13. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X,\,Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

14. Ha $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

    (a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

    (b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

    korrelációs együtthatóját.

15. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszák: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 1 & \text{, ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

16. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\varrho(X,\,Y) = \begin{cases} +1 & \text{, ha } a>0, \\ -1 & \text{, ha } a<0. \end{cases}$$

17. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z,\,Z^2)$?

18. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\varrho(Y,\,Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}.$$

19. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

20. Határozzuk meg 6 egyenletesen véletlenül választott $(0,1)$ szám közül a harmadik legkisebb várható értékét és szórását! Mi a második és negyedik legnagyobb szám kovarianciája, korrelációja?

21. Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

    (a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

    (b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i,\,D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az $X_i,\ X_j$, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)