Hatodik A4 gyakorlat

1. Folytonos várható érték és exponenciális eloszlás

1. A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben (feltesszük, hogy az eloszlásfüggvény folytonosan differenciálható, f(x) jelöli a sűrűségfüggvényt):
   $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$
   és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $\mathbb{E}(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx$.

2. *Exponenciális eloszlás*

   Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > s + t|X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él", a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött" dolognak.
   Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
   Megjegyzés:
   Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
   Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$. *Példa*: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.
   A λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.
   A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

Feladatok

1. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a várható értéke?

2. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot?

3. Vezesd le, hogy egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\lambda}$!

4. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

5. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

9. Bizonyítsuk be, hogy az
   $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$,
   $\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$,
   eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!