Matematika A4
VI. gyakorlat

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket: $F(x) = \mathbb{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. mindenhol balról folytonos.

Amikor $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos: ekkor X eloszlását *folytonosnak* nevezzük. Ebben az esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

Minden olyan x pontban, ahol f folytonos, fennáll, hogy $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Feladatok:

1. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon. Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?
2. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0.)

   a)
   $$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

   b)
   $$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

   c)
   $$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

d)

$$I(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

3. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

b)

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3}\sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}\ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

4. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

5. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye? És mi a hosszabbik sűrűségfüggvénye?

6. A zsebemben van egy l hosszúsági ropi. Egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm, majd kiválasztom az egyik darab ropit, 1/2-1/2 valószínűséggel a két darab közül. Mi az így kiválasztott darab eloszlásfüggvénye? Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab kisebb mint $0.25 \cdot l$?

7. Generálunk két véletlen egyenletes eloszlású számot egymástól függetlenül a $[0, 1]$ intervallumon. Mi a kettő maximumának sűrűségfüggvénye? Mi a valószínűsége, hogy a kisebbik szám nagyobb, mint 0.75?

8. A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

9. Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

10. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$?

11. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x?

12. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

13. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi a kivetített pont sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy-eloszlás.)*

14. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi az így kapott pont eloszlás- és sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

15. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

16. Határozd meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényét az alábbi valószínűségi változóknak, továbbá gondolkodjunk el azon, hogy ha csak a sűrűségfüggvényt ismernénk, hogyan tudnánk megmondani az eloszlásfüggvényt:

    a) $X = 5RND$
    b) $X = 2 + 5RND$
    c) $X = -2 + 5RND$
    d) $X = RND^2$
    e) $X = RND^{-2}$
    f) $X = RND^c$ ahol c egy pozitív konstans
    g) $X = RND^c$ ahol c egy negatív konstans
    h) $X = \ln RND$
    i) $X = -\ln RND$
    j) $X = 25\sqrt{RND}$
    k) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton növekvő folytonosan differenciálható függvény
    l) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton csökkenő folytonosan differenciálható függvény

17. Legyen az X egy tetszőleges folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $F(x)$ egy $[A, B]$ intervallumon (A lehet $-\infty$, B lehet ∞) szigorúan növekvő, és $F(A) = 0$, $F(B) = 1$. Határozzuk meg $F^{-1}(U)$ eloszlását! (Általánosított inverz eloszlásfüggvény használatával nincs szükség a feltevésekre, de ezzel részletesebben nem foglalkozunk).

18. Az előző feladatot használva vezesd le az (a,b)-n egyenletes eloszlású valószínűségi változó szimulációs képletét!

19. Határozzuk meg, hogy az A paraméter mely értékére lesz sűrűségfüggvény az $f(x) = \frac{A}{x^3}, x \geq 1$! Milyen képlettel lehetne szimulálni egy ilyen sűrűségfüggvényű valószínűségi változót?

20. Legyen RND_1 és RND_2 két független (0,1)-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az eloszlásfüggvénye az alábbiaknak:

    a) $X = RND_1^2 RND_2$
    b) $X = \frac{RND_2}{RND_1}$
    c) $X = \frac{RND_2}{RND_1^2}$