Hetedik A4 gyakorlat

1. Folytonos várható érték és exponenciális eloszlás

1. A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben (feltesszük, hogy az eloszlásfüggvény folytonosan differenciálható, f(x) jelöli a sűrűségfüggvényt):
   $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$
   és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $\mathbb{E}(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx.$

2. *Exponenciális eloszlás*

   Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > s + t|X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él”, a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.
   Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
   Megjegyzés:
   Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
   Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$. *Példa*: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.
   A λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.
   A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

Feladatok

1. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a várható értéke?

2. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot?

3. Választunk egy véletlen számot egyenletes eloszlással az $(1, 4)$ intervallumon, majd szerkesztünk egy egyenlő szárú derékszögő háromszöget, melynek ekkora a befogója. Mi a háromszög területének a várható értéke?

4. Egy árverésen a műkincsek élettartama exponenciális eloszlású, 100 év várható értékkel. Eladási áruk négyzetesen nő az idővel. Mi az eladási ár várható értéke?

5. Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

   a) Mennyi a várható élettartama?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

6. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

7. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

8. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

9. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ.

   a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   b) Hány óra garanciát vállaljunk, ha a garanciális időn belül átlagosan csak 5% garanciaigényt akarunk kielégíteni?

10. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

11. A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!

12. Egy számítógépes programozási nyelvben RND függvény előállít egy véletlen egyenletes eloszlású valószínűségi változót a $(0, 1)$ intervallumon. Milyen transzformációnak vessük alá ezt a számot ahhoz, hogy a kapott szám egy 7 paraméterű exponenciális legyen?

13. Bizonyítsuk be, hogy az
$\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$,
$\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$,
eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

2. Eloszlás paraméterei

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó *szórásnégyzete*: $\sigma^2 = \sum_{x_k} (x_k - m)^2 \, p(x_k)$.

Folytonos esetben: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \, f(x)dx$.

A szórásnégyzet kiszámítása momentumokból: $\sigma^2 = m_2 - m^2$.

Feladatok

14. Számítsa ki a Poisson eloszlás szórását!

15. Számítsa ki a geometriai eloszlás szórását!

16. Számítsa ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke? (A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)

17. Számítsa ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! (Az utóbbi az $\mathbb{E}|\mathbb{X} - \text{medián}|$ várható értéket jelenti.)

18. Számítsa ki az $f(x) = 2x \quad \text{ha } 0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

19. Mennyi az előző három feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

    a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
    b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$
    c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
    d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$

20. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

21. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

22. Legyenek az $X_i (i = 1 \dots 4)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak, azaz értékük p valószínűséggel 1 és $(1 - p)$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i (j = 1 \dots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \dots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

23. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

24. Egy iskolai kiránduláson során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25 illetve 50 diák utazik. Véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, és legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és legyen Y az ő buszában utazó tanulók száma.

    a) Mit gondolunk $E(X)$ vagy $E(Y)$ lesz nagyobb?
    b) Számoljuk ki $E(X)$ és $E(Y)$ értékeket!
    c) Számoljuk ki X és Y szórását!