Matematika A4
II. gyakorlat

1. Bemelegítés

1. Annak a valószínűsége, hogy A városban esni fog a héten $\frac{3}{4}$. Annak a valószínűsége, hogy sem A-ban sem B-ben nem fog esni az eső $\frac{1}{16}$. Míg annak a valószínűsége, hogy A-ban és B-ben is esni fog $\frac{11}{16}$.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy esni fog A-ban de B-ben nem?

   b) Mi annak a valószínűsége, hogy nem fog esni B-ben?

   c) Mi annak a valószínűsége, hogy esni fog B-ben?

2. Tegyük fel, hogy $P(A) = 0.6$ és $P(B) = 0.7$. Adjon minél élesebb alsó és felső becslést a következő valószínűségekre:

   a) $P(A \cap B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(A \setminus B)$

2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú részintervallumba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$;

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}.$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}.$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}.$$

Feladatok:

3. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a *nagymutató* az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$-ed részén van?

4. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?
5. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?
6. Mi a valószínűsége, hogy a $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül
   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?
   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?
7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél és a területe kisebb $1/4$ területegységnél? Szimulációval hogyan tudnánk meghatározni a kérdezett valószínűség közelítő értékét?
8. *Buffon-féle tűprobléma*: Egy nagy papírlapra 2 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 1 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?
9. *Buffon-féle tűprobléma kicsit módosítva*: Egy nagy papírlapra 1 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?
10. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.
    a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám? Hogyan közelíthetnénk excel szimulációval a kérdezett valószínűségeket?
    b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?
11. Mi a valószínűsége, hogy független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$?
12. Egy 10 cm-es ropit egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm. Mi a valószínűsége annak, hogy a kisebbik darab hossza kisebb mint 2,5 cm?
13. Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de legfeljebb 30 percet késnek, a találka helyszínére való érkezési idejük tehát véletlen, egyenletes eloszlású a 6 óra és fél 7 közti időintervallumban. Amikor valamelyikük megérkezik, ha nem találja ott a másikat, akkor 10 percet vár, és ha addigra sem érkezett meg a másik, akkor csalódottan hazamegy. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?
14. Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de Jancsi legfeljebb 10 percet, Juliska legfeljebb 30 percet késik. Jancsi, amennyiben érkezésekor nem találja ott Juliskát, hajlandó még 10 percet várni rá, a lány azonban csak 5 percig vár, nem találja ott Jancsit. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?
15. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0,1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Hogyan közelítenénk excel szimulációval annak a valószínűségét, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$ és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?
16. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1,1)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy kisebb x-nél?

17. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? És annak a valószínűsége, hogy kisebb x-nél?

18. *Bertrand-paradoxon*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

    b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

    c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.