Harmadik A4 gyakorlat

1. Független események

Lásd második gyakorlat feladatsora.

2. Diszkrét eloszlások

Nevezetes eloszlások

- *Binomiális eloszlás*:
  Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej (tehát lehet, hogy hamis), akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

  $$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

  Például, pontosan 3 hatos valószínűsége 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$.

- *Hipergeometrikus eloszlás*:
  A darab piros, és B darab fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab piros golyót húzzunk ki:

  $$P(X = k) = h(k; A, B, n) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \qquad (k = \max(0, n - B), \dots, \min(A, n)).$$

  Például, 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

- *Geometriai eloszlás (optimista)*:
  Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

  $$\mathbb{P}(X = k) = g(k; p) = (1 - p)^{k-1} p \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

- *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
  Hány nemhatost dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

  $$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
  Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6) =$

$\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérletet (egymástól függetlenül) elvégezni, hogy megkapjuk az n-edik sikert:

$$\mathbb{P}(X=k)=n(k;n,p)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} \qquad (k=n,n+1,n+2,\dots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
  Hány nemhatost dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k+2}{2}(1/6)^2(5/6)^k(1/6)=\binom{k+2}{2}(1/6)^3(5/6)^k$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, független kísérleteknél hány kudarc előzi meg az n-edik sikert:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k=\binom{-n}{k}p^n(-q)^k \qquad (k=0,1,2,\dots;q=1-p).$$

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
   c) a 12. autó a harmadik piros?
2. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy
   a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?
   b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?
   c) hány terméket szállított két leállás között?
   d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza.)
3. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
4. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
   c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
   d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?
5. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után
   a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
   b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
   c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?
6. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X=7)=$?

7. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?

8. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

9. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

10. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

11. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?

12. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 250 db szék van.

    a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?
    b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
    c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék? (Elég képlettel megadni.)

13. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnének?)

14. Mi a valószínűsége, hogy 0, 1, 2, 3, 4, 5 találatom lesz az ötös lottón?

15. Mi a valószínűsége, hogy 11, 12, 13, 13+1 találatom lesz a totón, ha felteszem hogy bármely eredményt (1, 2 vagy X) 1/3 valószínűséggel találok el?

16. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)

17. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

    a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dobnánk?
    b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?

18. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

    a) pont k-szor dobunk a fej előtt?
    b) pont k-szor dobunk az érmével?

19. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor különbözne ez az előző eredménytől ?

20. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

    a) legkisebbet,
    b) legnagyobbat,
    c) 2. legkisebbet,
    d) 3. legkisebbet,
    e) s-edik legkisebbet.

    Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény képletét!

21. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

22. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?

23. *Általánosítás:* Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r-ik pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény képletét! Adja meg a súlyfüggvényt visszatevéses húzás esetén is!

24. Egymás után kérdezgetjük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.

    a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!
    b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!