Matematika A4
III. gyakorlat megoldás

1. Független események

Lásd második gyakorlat feladatsora.

2. Diszkrét eloszlások

Nevezetes eloszlások

- *Binomiális eloszlás*:
Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej (tehát lehet, hogy hamis), akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Például, pontosan 3 hatos valószínűsége 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$.

- *Hipergeometrikus eloszlás*:
A darab piros, és B darab fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab piros golyót húzzunk ki:

$$P(X = k) = h(k; A, B, n) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \qquad (k = \max(0, n-B), \ldots, \min(A, n)).$$

Például, 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

- *Geometriai eloszlás (optimista)*:
Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

$$\mathbb{P}(X = k) = g(k; p) = (1-p)^{k-1} p \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

- *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
Hány nemhatost dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X=k)=\binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6)=\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérletet (egymástól függetlenül) elvégezni, hogy megkapjuk az n-edik sikert:

$$\mathbb{P}(X=k)=n(k;n,p)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} \qquad (k=n,n+1,n+2,\dots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
Hány nemhatost dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k+2}{2}(1/6)^2(5/6)^k(1/6)=\binom{k+2}{2}(1/6)^3(5/6)^k$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, független kísérleteknél hány kudarc előzi meg az n-edik sikert:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k=\binom{-n}{k}p^n(-q)^k \qquad (k=0,1,2,\dots;q=1-p).$$

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
   Megoldás: Optimista geometria, hiszen azt az autót is beszámítjuk, ami végül felvesz.

   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
   Megoldás: Binomiális eloszlás

   c) a 12. autó a harmadik piros?
   Megoldás: Optimista negatív binomiális eloszlás

2. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

   a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?
   Megoldás: Binomiális eloszlás, ahol $p=0,02$. A súlyfüggvény $k=0,1,\dots,n$ esetben:

   $$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}0,02^k\cdot 0,98^{n-k}.$$

   b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig? *Megoldás: Pesszimista negatív binomiális eloszlás, ahol $p=0,02$. A súlyfüggvény $k=0,1,\dots$ esetben:*

   $$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k}{n-1}0,02^k\cdot 0,98^{k-n+1}.$$

   c) hány terméket szállított két leállás között?
   Megoldás: Pesszimista geometriai eloszlás, ahol $p=0,02$. A súlyfüggvény $k=0,1,\dots$ esetben:

   $$\mathbb{P}(X=k)=0,98^k\cdot 0,02.$$

   d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza.)
   Megoldás:Pesszimista geometriai eloszlás, ahol $p=0,98$. A súlyfüggvény $k=0,1,\dots$ esetben:

   $$\mathbb{P}(X=k)=0,02^k\cdot 0,98.$$

3. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
Megoldás: Legyen X *: a találatok száma. Ekkor* X *binomiális eloszlást követ* $n = 6$ *és* $p = \frac{2}{3}$ *paraméterekkel.*

$$\mathbb{P}(\textit{4-et találok el}) = \mathbb{P}(X = 4) = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

$$\mathbb{P}(\textit{2-nél többet, 6-nál kevesebbet találok el}) = \mathbb{P}(2 < X < 6) = \mathbb{P}(3 \leq X \leq 5) = \mathbb{P}(X = 3)+\mathbb{P}(X = 4)+\mathbb{P}(X = 5)$$
$$= \binom{6}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right).$$

4. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap $0,2$ valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor $0,95$ valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy Blicc urat egy nap megbüntetik $p = 0,2 \cdot 0,95 = 0,19$. *Ha* X*: az* 5 *munkanap alatt bekövetkező büntetések száma, akkor* X *binomiális eloszlást követ* $n = 5$ *és* $p = 0,19$ *paraméterekkel.*

$$\mathbb{P}(\textit{szerencsés hét}) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}0,19^0 \cdot 0,81^5 = 0,81^5.$$

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
   Megoldás: A fenti rész jelölséeit használva

$$\mathbb{P}(\textit{2-szer büntetik meg}) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2}0,19^2 \cdot 0,81^3.$$

   c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
   Megoldás: Jelölje E *azt az eseményt, hogy ötször volt ellenőr a villamoson, és* F *azt az eseményt, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van. Annak a valószínűsége, hogy ha van ellenőr a buszon, nem bünteti meg Blicc urat* $0,05$.*Ekkor a keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F|E) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0,05^5 \cdot 0,2^5}{0,81^5}$$

   d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?
   Megoldás: Jelölje Y *a napok számát a második büntetésig. Ekkor* Y *negatív binomiális eloszlást követ* $p = 0,19$ *paraméterrel.*

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \binom{3}{1}0,81^2 \cdot 0,19 \cdot 0,19.$$

5. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után

a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
Megoldás: Jelölje X a szöcske által megtett balralépések számát. Ekkor X binomiális eloszlást követ $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Ha a 0-ban lesz, akkor az azt jelenti, hogy 10-szer lépett balra és 10-szer jobbra. Azaz

$$\mathbb{P}(\textit{0-ban lesz}) = \mathbb{P}(X = 10) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
Megoldás: Ez a valószínűség 0, ugyanis páros számú lépés után csak páros pontban lehet a szöcske.

c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?
Megoldás: Tekintve, hogy az ugrások egymástól függetlenek, így $1/2$ annak a valószínűsége, hogy a (-2)-ből a (-3)-ba ugrik függetlenül az előző lépsektől.

6. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X = 7) =?$
Megoldás: Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ.

$$\mathbb{P}(X = 7) = \frac{\binom{17}{7} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{30}{12}}.$$

7. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?
Megoldás: Jelölje X: a kiválasztott fehér boros üvegek számát. Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{50}{7}}{\binom{80}{10}}.$$

8. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?
Megoldás: Jelölje X: a dobott fejek számát, és C azt az eseményt, hogy a cinkelt kockával dobtam. Ekkor az $X = 25|C$ változó binomiális eloszlást követ $n = 30$ és $p = \frac{3}{4}$ paraméterekkel illetve az $X = 25|\overline{C}$ változó binomiális eloszlást követ $n = 30$ és $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(C|X = 25) = \frac{\mathbb{P}(X = 25|C) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(X = 25|C) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(X = 25|\overline{C}) \cdot \mathbb{P}(\overline{C})} =$$

$$= \frac{\binom{30}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \frac{1}{2}}{\binom{30}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \frac{1}{2} + \binom{30}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3^{25}}{3^{25} + 2^{30}}.$$

9. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.
Megoldás: Jelölje X: a balkezesek arányát. Ekkor X binomiális eloszlást követ $p = 0,01$ és $n = 200$ paraméterekkel. (A valószínűség becslésére a 4. gyakorlaton kerül sor.) Ekkor

$$\mathbb{P}(\textit{legalább 4 balkezes}) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{200}\binom{200}{k}0,01^k \cdot 0,99^{200-k} = 1 - \sum_{k=0}^{3}\binom{200}{k}0,01^k \cdot 0,99^{200-k}.$$

10. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?
Megoldás: Jelölje X: a készületlenül felelők számát. Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ. A súlyfüggvény $k = 0, 1, \ldots, 7$ esetben

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{14}{7-k}}{\binom{22}{7}}.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{14}{5}}{\binom{22}{7}}.$$

11. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?
Megoldás: Jelölje A esemény azt, hogy az I. gépsor dolgozik, és B azt, hogy a II. gépsor dolgozik. Használva a függetlenséget kapjuk a valószínűségeket.

$$\mathbb{P}(\textit{mindkét gép dolgozik}) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0,6 \cdot 0,7$$

$$\mathbb{P}(\textit{legalább az egyik dolgozik}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{egyik sem dolgozik}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 0,4 \cdot 0,2$$

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan egy gép dolgozik}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$$

$$\mathbb{P}(\textit{mindkét gép áll}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = 0,4 \cdot 0,3$$

12. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 250 db szék van.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?
Megoldás: Jelölje X: az órára járó hallgatók számát. Ekkor X binomiális eloszlást követ $n = 400$ és $p = 0,6$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(\textit{mindenkinek jut szék}) = \mathbb{P}(X \leq 250) = \sum_{k=0}^{250} \binom{400}{k} 0,6^k \cdot 0,4^{400-k}.$$

b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
Megoldás: 400 szék kell ehhez, ugyanis $\mathbb{P}(\textit{mindenki bent van}) = \mathbb{P}(X = 400) = 0,6^{400} > 0$.

c) Hány szék kell, hogy legalább $0,99$ valószínűséggel jusson mindenkinek szék? (Elég képlettel megadni.)
Megoldás:

13. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnének?)
Megoldás: A feladat megoldása a 8-as feladathoz hasonlóan történik, csak az ottani fix 25 érték itt most egy ismeretlen k paramétert jelent. A fenti levezetés alapján

$$\mathbb{P}(C|X = k) = \frac{3^k}{3^k + 2^{30}} \geq \frac{1}{2}.$$

Ezt alakítva kapjuk, hogy $3^k \geq 2^{30}$, azaz $k \geq 19$. Ez azt jelenti, hogy legalább 19 fejet dobtunk, akkor már azt mondhatjuk, hogy cinkelt az érménk.

14. Mi a valószínűsége, hogy $0, 1, 2, 3, 4, 5$ találatom lesz az ötös lottón?
Megoldás: Jelölje X a találatok számát az 5-ös lottón. Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

15. Mi a valószínűsége, hogy $11, 12, 13, 13 + 1$ találatom lesz a totón, ha felteszem hogy bármely eredményt (1, 2 vagy X) $1/3$ valószínűséggel találok el?
Megoldás: Jelölje X a találatok számát a totón. Ekkor X binomiális eloszlást követ $n = 14$ és $p = 1/3$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(X = 11) = \binom{14}{11} \left(\frac{1}{3}\right)^1 1 \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

$$\mathbb{P}(X = 12) = \binom{14}{12} \left(\frac{1}{3}\right)^1 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$$\mathbb{P}(X = 13) = \binom{14}{13} \left(\frac{1}{3}\right)^1 3 \left(\frac{2}{3}\right)^1.$$

$$\mathbb{P}(X = 14) = \binom{14}{14} \left(\frac{1}{3}\right)^1 4 \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

16. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább $1/2$ legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)
Megoldás:

17. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

    a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dobnánk?
    Megoldás: Jelölje X az első 12 összeget megelőző dobások számát. Ekkor X pesszimista geometriai eloszlást követ $p = 1/36$ paraméterrel. Tehát

    $$\mathbb{P}(X = 8) = \left(\frac{35}{36}\right)^8 \left(\frac{1}{36}\right)$$

    b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?
    Megoldás: Jelölje X az első 12 összegig a dobások számát. Ekkor X optimista geometriai eloszlást követ $p = 1/36$ paraméterrel. Tehát

    $$\mathbb{P}(X = 8) = \left(\frac{35}{36}\right)^7 \left(\frac{1}{36}\right)$$

18. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

    a) pont k-szor dobunk a fej előtt?
    Megoldás: Jelölje X az első fej dobás előtti dobások számát. Ekkor X pesszimista geometriai eloszlást követ p paraméterrel. Tehát a súlyfüggvény $k = 0, 1, \ldots$ esetben

    $$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p$$

b) pont k-szor dobunk az érmével?
Megoldás: Jelölje X az első fej dobásig a dobások számát. Ekkor X optimista geometriai eloszlást követ p paraméterrel. Tehát a súlyfüggvény $k = 1, 2, \ldots$ esetben

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

19. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor különbözne ez az előző eredménytől ?
Megoldás: Jelölje X: a dobások számát a harmadik hatos dobásig. Ekkor X optimista negatív binomiális eloszlást követ $p = 1/6$ paraméterrel.

$$\mathbb{P}(X = 12) = \binom{11}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6}.$$

A másik kérdésre adott válasz különbözik az előzőtől. Hiszen az így feltett kérdés azt jelenti, hogy 15 dobásból sikerült harmadjára 6-ost dobni. Ekkor is a fenti X a valószínűségi változó, de ekkor pesszimista negatív binomiális eloszlással.

$$\mathbb{P}(X = 12) = \binom{14}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \cdot \frac{1}{6}.$$

20. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

a) legkisebbet,

b) legnagyobbat,

c) 2. legkisebbet,

d) 3. legkisebbet,

e) s-edik legkisebbet.

Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény képletét!

Megoldás:

21. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

Megoldás:

22. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?

Megoldás:

23. *Általánosítás:* Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r-ik pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény képletét! Adja meg a súlyfüggvényt visszatevéses húzás esetén is!

Megoldás:

24. Egymás után kérdezgetjük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.

a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

Megoldás:

b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

Megoldás: