Matematika A4
VII. gyakorlat

1. Eloszlás paraméterei

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó *szórásnégyzete*: $\sigma^2 = \sum_{x_k} (x_k - m)^2\, p(x_k)$.

Folytonos esetben: $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\, f(x)dx$.

A szórásnégyzet kiszámítása momentumokból: $\sigma^2 = m_2 - m^2$.

Feladatok

1. Számítsa ki a Poisson-eloszlás, a geometriai eloszlás, a standard és általános normális eloszlás szórását!
2. Számítsa ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke? (A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)
3. Számítsa ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! (Az utóbbi az $\mathbb{E}|\mathbb{X} - \text{medián}|$ várható értéket jelenti.)
4. Számítsa ki az $f(x) = 2x \quad \text{ha } 0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!
5. Mennyi az előző három feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?
   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$
   c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$
6. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?
7. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?
8. Legyenek az $X_i (i = 1 \dots 4)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak, azaz értékük p valószínűséggel 1 és $(1-p)$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{j} X_i (j = 1 \dots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \dots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?
9. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

2. Normális eloszlások

A *standard normális eloszlás* sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,
eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

Az $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű (m a várható érték, σ a szórás) *normális eloszlás* a standard normálisból származtatható. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $Y = \sigma X + m$ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású; Y eloszlásfüggvénye:

$$F(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\sigma X + m < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right),$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}.$$

3. Feladatok

10. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek? (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)dx$ (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)dx$
    (d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi(x)dx$
11. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
    (a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$ (b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$ (c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$
12. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!
13. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:
    a) $\mathbf{P}(X > 225)$
    b) $\mathbf{P}(215 < X < 229)$
    c) $\mathbf{P}(215 < X < 229 | X > 225)$
    d) $\mathbf{P}(X > 225 | 215 < X < 229)$
14. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínáségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!
15. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk excelben imserősünk megérkezési idejét!
16. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

a) 50 fő alatt

b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

17. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

18. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!