Matematika A4
II. gyakorlat megoldás

1. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy A esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, hogy tudjuk, hogy egy másik B esemény már bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A feltételes valószínűség jelölése: $P(A|B)$. Olvasva: A valószínűsége feltéve B-t. Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

1. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok $5 - 5$ lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

   Megoldás: A komplementer módszer segítségével $\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{ az elenfélnek nincs zöldje})$. *A feladat hipergeometrikus eloszlással oldható meg (lásd lottós feladat). Így a feltételes esetben a következőt kapjuk*

   $$\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}|\textit{nekem 3 zöld és két piros}) = 1 - \frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{15}{5}}.$$

   Abban az esetben, ha az én lapjaimról nem tudunk semmit, akkor nincs annak jelentsége, hogy én is kpatam 5 *lapot. Így ekkor a keresett valószínűség*

   $$\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{20}{5}}.$$

2. Egy szabályos kockával dobtam. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy párosat dobtam, ha barátomtól tudom, hogy legalább 4-est dobtam?

   Megoldás: A feltételes valószínűség definícióját használva:

   $$\mathbb{P}(\textit{páros a dobás}|\textit{legalább 4-es dobás}) = \frac{\mathbb{P}(\textit{páros a dobás és legalább 4-es dobás})}{\mathbb{P}(\textit{legalább 4-es dobás})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

3. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

   Megoldás: A feltételes valószínűség definícióját használva:

$$\mathbb{P}(\textit{legalább egy db 2-es dobás}|\textit{dobott összeg 6}) = \frac{\mathbb{P}(\textit{legalább egy db 2-es dobás és a dobott összeg 6})}{\mathbb{P}(\textit{dobott összeg 6})} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

Ha nem tudunk semmit akkor a következő kapjuk:

$$\mathbb{P}(\textit{legalább egy db 2-es dobás}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{egyik dobás sem 2-es}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

(A feladat az eseménytér felírásával is megoldható.)

4. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé?

Megoldás: $\mathbb{P}(B1) = \frac{110}{260}$

ii) betegé?

Megoldás: $\mathbb{P}(A1) = \frac{100}{260}$

iii) beteg fiúé?

Megoldás: $\mathbb{P}(A1 \cap B1) = \frac{50}{260}$

b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A1|B2) = \frac{\mathbb{P}(A1 \cap B2)}{\mathbb{P}(B2)} = \frac{\frac{40}{260}}{\frac{120}{260}} = \frac{40}{120}.$$

c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B3|A1) = \frac{\mathbb{P}(B3 \cap A1)}{\mathbb{P}(A1)} = \frac{\frac{10}{260}}{\frac{100}{260}} = \frac{10}{100}.$$

d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

Megoldás: Itt a megoldásnál a következő részben ismertetett szorzási szabályt használjuk.

$$\mathbb{P}(\textit{1 fiú - 1 lány karton}|\textit{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{99}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{2 fiú karton}|\textit{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99}.$$

2. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya (avagy toronyszabály):

$$P(A_n \cap A_{n-1} \cap \ldots A_1) = P(A_n | A_{n-1} \cap \ldots A_2 \cap A_1) \cdot P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \ldots A_2 \cap A_1) \cdot \ldots P(A_3 | A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1).$$

5. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük

   Megoldás: Legyen A_1 az az esemény, hogy az első húzás piros, A_2 az, hogy a második húzás fehér, és A_3 az, hogy a harmadik húzás zöld. Ekkor

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14}.$$

   b) nem tesszük vissza?

   Megoldás: Ekkor a fenti számok a következőképpen módosulnak:

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12}.$$

6. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány a) átvészeli a teljes eljárást?

   Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy a csótányok túlélik az i-dik irtást, $I = 1, 2, 3$. Ekkor

   $$\mathbb{P}(\textit{túlél}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,192.$$

   b) az utolsó irtáskor pusztul el?

   Megoldás: Ekkor a keresett valószínűség

   $$\mathbb{P}(\textit{3. irtásnál hal meg}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_3} | A_2 \cap A_1) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,048.$$

   c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

   Megoldás: Ekkor használva a feltételes valószínűség definícióját

   $$\mathbb{P}(\textit{túlél} | \textit{1. irtást túlélte}) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

7. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?

   Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i-dik húzás során kivett alkatrész működőképes, $i = 1, 2, 3$. Ekkor

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{13}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}.$$

8. Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt? b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!) c) egyik sem húz ilyen tételt?

Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i-dik hallgató nevezetes eloszlásos tételt húz, $i = 1, 2$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\textit{első nevezetes eo, a második nem}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{mindkettő nevezetes eo}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{6}{30}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{egyik sem nevezetes eo}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29}.$$

(Az a) és c) esetben feltettük, hogy nem húzhatják ugyanazt a tételt.)

3. Teljes valószínűség tétele

Ha $H_n, H_{n-1}, H_{n-2}, \ldots, H_2, H_1$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_n) \cdot P(H_n) + P(A|H_{n-1}) \cdot P(H_{n-1}) + \ldots P(A|H_1) \cdot P(H_1).$$

9. Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?

Megoldás: Itt az A esemény lesz az, hogy valaki megbukik a vizsgán. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy a hallgató lány, H_2 pedig azt, hogy fiú. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,8$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,2$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,15$ illetve $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,1$. Így a teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,15 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,14.$$

10. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy a) az első üzletkötés kedvező lesz? b) mindkét üzletkötés javunkra válik? c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?

Megoldás:Itt az A esemény lesz az, hogy kedvező az üzletkötés. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy az A céggel kötünk üzletet, H_2 pedig azt, hogy a B céggel. Ekkor a következő valószínűségek ismertek. $\mathbb{P}(H_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,5$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,6$ illetve $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,7$.
a) rész megoldásava teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,65.$$

b) részben B jelentse azt az eseményt, hogy mindkét üzletkötés kedvező. Ekkor $\mathbb{P}(B|H_1) = 0,6^2$ illetve $\mathbb{P}(B|H_2) = 0,7^2$. Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6^2 \cdot 0,5 + 0,7^2 \cdot 0,5 = 0,65.$$

c) részben C jelenti azt az eseményt, hogy az egyik üzlet sikeres, a másik pedig nem. Ekkor $\mathbb{P}(C|H_1) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4$ illetve $\mathbb{P}(C|H_2) = 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3$ (itt a 2-es szorzóra azért van szükség, mert az első ás a második üzlet is lehet a sikeres). Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(C|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,45.$$

11. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy Iván az i-dik kocsmában van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ekkor a H_i-k egymást kizáró események, és uniójuk valószínűsége $2/3$. Iván nem válogatós volta miatt $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Felhasználva, hogy a H_5 esemény része a $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4}$ eseménynek, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(H_5|\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4}) = \frac{\mathbb{P}(H_5)}{\mathbb{P}(\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4})} = \frac{\mathbb{P}(H_5)}{\mathbb{P}(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H_5)}{1 - \mathbb{P}(H_1) - \mathbb{P}(H_2) - \mathbb{P}(H_3) - \mathbb{P}(H_4)} = \frac{\frac{2}{15}}{1 - 4 \cdot \frac{2}{15}} = \frac{2}{7}$$

12. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyeréshez (11-10-nél folytatják két pont különbségig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzjutalmat: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben 10-9-es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztozkodás a pénzen?

Megoldás:

4. Bayes tétel

Ha tudjuk, hogy A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan H_i eseménnyel valósult meg? (Itt $H_1, H_2, \dots H_n$ ismételten teljes eseményrendszert alkot.) A definíció szerinti képletet felírva a számlálóban a feltételes valószínűségre, és a nevezőben a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a következő képlet:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_n) \cdot P(H_n) + \cdots + P(A|H_1) \cdot P(H_1)}.$$

13. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a ketyerét az A, B vagy C gépsoron állították elő ($i = 1, 2, 3$). És legyen A az az esemény, hogy a ketyere hibás. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,25$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,35$, $\mathbb{P}(H_3) = 0,4$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,05$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,04$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 0,02$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűségeket:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{A}}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,36,$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{B}}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,04 \cdot 0,35}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,41,$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,23.$$

14. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2×2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a Odüsszeusz az athéni, spártai vagy mükénéi utat választja ($i = 1, 2, 3$). És legyen A az az esemény, hogy igazat mond a megkérdezett személy. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_3) = 1/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 1$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{11}.$$

15. Az igazak városában az emberek 90%-a igazat mond, a hazugok városában az emberek 85%-a hazudik. Mivel lefüggönyözött busszal hoztak ide minket, nem tudjuk melyikben vagyunk. Megkérdezünk egy embert, aki azt mondja, hogy "Ez a hazugok városa." Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy az igazak vagy a hazugok városába vittek minket ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy igazat mond a megkérdezett személy. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,5$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,9$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,15$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget. (Ha a kiválasztott személy igazat mond, akkor ő lehet a hazugok városában igazmondó, és az igazmondók városában hazug.)

$$\mathbb{P}(\textit{igazat mond}|\textit{"Ez a hazugok városa"}) = \frac{0,15 \cdot 0,5}{0,15 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5} = \frac{3}{5}.$$

16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

    a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

    Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a bináris csatornán 0 vagy 1 jelet adtak le ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy 0-t kaptunk. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 2/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/5$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

    $$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{15}{23}.$$

    b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

    Megoldás: Használva az előző rész jelöléseit, itt a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk a keresett valószínűséget:

    $$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(\overline{A}|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0,65.$$

17. Tegyük fel, hogy a lakosság 0.001-ed része szenved egy bizonyos ártalmas betegségben, 0.999-ed része egészséges. A betegség kimutatására szolgáló teszt olyan, hogyha valaki beteg, akkor 0.998 valószínűséggel betegséget

jelez, 0.002 valószínűséggel azt mutatja, hogy az illető egészséges; ha pedig egészséges emberen végzik el a tesztet, akkor 0.995 valószínűséggel egészségesnek diagnosztizálja az illetőt, 0.005 valószínűséggel betegnek. Tegyük fel, hogy Móricka tesztje pozitív, vagyis betegnek mutatja a teszt. Mi a valószínűsége annak, hogy Móricka tényleg beteg?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy egy adott ember beteg-e vagy sem ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy a teszt pozitív. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,001$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,999$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/5$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{15}{23}.$$

5. Független események

Az A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Több esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \ldots P(A_n),$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \cdots \cap A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \ldots P(A_n).$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van. Fordítva is igaz: ha az összes így származtatott egyenlet fennáll, akkor az $A_1, A_2, \ldots A_n$ eseményekről azt mondjuk, hogy együttesen függetlenek.

18. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Győződjünk meg róla, hogy A, B, C eseményekből bármely kettő független egymástól, de a 3 esemény együttesen már nem alkot független rendszert!

    Megoldás: A szöveg alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$. Ezekből láthatóak, hogy teljesülnek a páronkénti függetlenségek, hisz $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ illetve $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$.
    Ugyanakkor $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, így $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$. (Bármely két esemény már egyértelműen meghatározza a harmadikat.)

19. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ a dobott számok összege 7 , $B =$ legalább az egyik kockán van hatos , $C =$ mindkét kockával páratlant dobok , $D =$ a két kockával különböző számokat dobok , $E =$ a zöld kockával 4-est dobok .
    Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

    a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

       Megoldás: A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Ugyanakkor $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$. Így nem teljesül a $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ azonosság, tehát A és C nem lehetnek függetlenek.

b) Kizáróak-e az A és C események?

Megoldás: Igen, hisze együttes bekövetkezési valószínűségük 0. *(*$\mathbb{P}(A \cap C) = 0$*)*

c) Mennyi a B esemény valószínűsége?

Megoldás: $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}$

d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

Megoldás: Az A esemény része a D eseménynek. Azaz, ha A bekövetkezik, akkor D is. Így A és D nem lehetnek függetlenek, illetve $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(D)$ *teljesül.*

e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

Megoldás: A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap E) = \frac{1}{36}$. *Így teljesül a* $\mathbb{P}(A \cap E) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(E)$ *azonosság, tehát A és E függetlenek.*

f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

i. függetlenek, de nem kizáróak,

Megoldás: A és E események

ii. kizáróak, de nem függetlenek.

Megoldás: A és C események

6. További feladatok

20. Az A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.

Megoldás:

b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?

Megoldás:

c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

Megoldás:

21. *(Felületes utazó)* Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevelét. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt $0,1$ valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?

Megoldás:

b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útlevél nem is volt ezekben?

Megoldás:

22. Az A városból a B városba három diszjunkt út vezet. Egy havas téli éjszakán A-ból B-be kell mennünk, és a rádiót hallgatjuk, hogy hol vannak az utakon hótorlaszok. Korábbi tapasztalatból tudjuk, hogy mind a három úton három kritikus pont van, amelyek mindegyike, egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka el tudunk jutni A-ból B-be?

Megoldás:

23. a) Minden héten egy szelvénnyel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?

Megoldás:

b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnyel játszunk?

Megoldás:

c) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnyel játszunk, amelyeken nincsen egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)

Megoldás:

24. *(Nehéz feladat!)* Szindbád, az Ezeregyéjszaka meséinek híres hőse, N háremhölgy közül szeretné kiválasztani a legszebbet, akik egyesével elsétálnak előtte. Szindbád az ún. *K-stratégiával* választ közülük: hagyja, hogy K lány elsétáljon előtte (ezek közül semmiképpen nem választ), majd kiválasztja az első olyat, aki minden korábban látottnál szebb. Feltéve, hogy a lányok között szépség szempontjából egyértelmű rendezés van, és egy teljesen véletlen sorrendben jönnek elő, mi a valószínűsége, hogy Szindbád ki tudja választani a legszebbet a K-stratégiával? Kb. mennyi az optimális K érték, ha N nagy? (Segítség: Alkalmazza a teljes valószínűség formuláját azokkal az A_r eseményekkel, hogy a legszebb lány r-edikként jelenik meg, $r = 1, 2, \ldots, N$. Határozza meg annak az eseménynek a feltételes valószínűségét, hogy az első $r - 1$ ($r > K + 1$) lányból a legcsinosabb nem esik az első K lány közé! Ugyanis ekkor Szindbád hibázni fog.)

Megoldás: