Negyedik A4 gyakorlat
rövid megoldási útmutató

2013. október 14.

1. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van. (Számoljuk ki a korábban tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

   A 200 *véletlenszerűen kiválasztott ember közt a balkezesek száma legyen* X. *Ekkor ugye* X *binomiális eloszlású* $n = 200$ *és* $p = 0,01$ *paraméterekkel. Ennek megfelelően:*

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - (\sum_{i=0}^{3} \binom{200}{i} 0,01^i, 99^{200-i})$$

   Mivel $n = 200$ *már "nagy"-nak számít, a* $p = 0.01$ *pedig "kicsi"-nek, ezért a binomiális kifejezések számolása helyett közelíthetünk Poissonnal. Ha* n*-edrendű* p *paraméterű binomiálist közelítünk Poissonnal, akkor* λ*-t* np*-nek kell választani. Esetünkben ez* $\lambda = 2$*-t jelent:*

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} - \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0.1429$$

2. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset! Egy nap során hány tűzeset a legvalószínűbb?

   Legyen X *a lakástüzek száma egy adott napon. Sok lakás van, mindegyik nap mindegyik lakásban egy kis valószínűséggel üt ki tűz, így* X *tekinthető Poisson eloszlásúnak.*

$$P(X = 4) = P(X = 5) \Rightarrow \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$$

   Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy $\lambda = 5$. *A kérdéses érték:*

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{25}{2}e^{-5} \approx 0.08422$$

3. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

   Itt is Poisson eloszlást fogunk használni. X *legyen egy kiválasztott sütiben lévő mazsolák száma, és tegyük fel, hogy* x λ *paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ekkor* X *várható értéke* λ. *Ez azt jelenti, hogy ha a paraméter* λ, *akkor sok kísérlet átlaga* λ*-hoz fog tartani, vagyis átlagosan* λ *mazsola lesz egy sütiben. Ennek megfelelően ha kiszámoltuk a megfelelő* λ *értéket, akkor az lesz a megoldás.*

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \geq 0.99 \Rightarrow \lambda \geq log100 \approx 4,6$$

Összegezve tehát legalább $4,6$ *db mazsolának kell egy sütire jutnia.*

4. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van? Hány sajtóhiba a legvalószínűbb a 13. oldalon? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két sajtóhiba van?

   Poissonnal közelítünk. Nincs jelentősége, hogy a 13. oldalról van szó. Átlagosan fél sajtóhiba van egy lapon, vagyis $\lambda = 1/2$.

   $$P(\textit{13. oldalon lévő sajtóhibák száma} > 1) =$$

   $$1 - P(\textit{13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 0) - P(\textit{13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 1) =$$

   $$1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx 0,090204$$

   6 oldalra átlagosan $6.\frac{1}{2} = 3$ *hibát "várunk", ezért ebben az esetben* $\lambda_2 = 3$.

   $$\frac{{\lambda_2}^0}{0!}e^{\lambda_2} \approx 0,05$$

5. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt.

   a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
   b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
   c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

   Jelölje X *azon emberek számát, akik egy adott évben a Dunába ölik magukat. Tegyük fel, hogy* X *Poisson eloszlású valamely* λ *paraméterrel. A feladat feltétele szerint:*

   $$P(X = 2) = 3P(X = 5) \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = 3\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,71$$

   Tehát átlagosan $\lambda \approx 2,71$ *ember öli magát egy évben a Dunába, és*

   $$P(\text{senki sem lesz így öngyilkos}) = P(X = 0)\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \approx 0,067.$$

6. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz? Mi a valószínűsége, hogy a főnyereményen meg kell osztozni?

   Ha X *az öttalálatos szelvények száma, akkor* X *eloszlása nyilván binomiális* $n = 4000000$ *és* $p = P(\textit{egy adott szelvény telitalálatos}) = \frac{1}{\binom{90}{5}}$ *paraméterekkel. Ennek megfelelően:*

   $$P(X = k) = \binom{4000000}{k}(\frac{1}{\binom{90}{5}})^k(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}})^{4000000-k},$$

melyet $\lambda = np = \frac{4000000}{\binom{90}{5}} \approx 0,091$ *paraméterű Poissonnal közelítve:*

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-lambda}.$$

Így:

$$P(\text{főnyereményen meg kell osztozni}) = P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-lambda} \approx 0,0039$$

7. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

   Legyen X *a 10:00 és 10:05 között beérkező hívások száma, és tegyük fel, hogy* X *Poisson eloszlású. Ezen* 5 *perc alatt átlagosan 10 hívás érkezik, így az eloszlás paramétere* $\lambda = 10$. *Ennek megfelelően:*

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} - \frac{10^1}{1!} e^{-10} - \frac{10^2}{2!} e^{-10} - \frac{10^3}{3!} e^{-10} \approx 0,99$$

8. A „Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

   Legyen X *a kullancsok száma egy adott emberben. Ekkor* X *tekinthető Poisson eloszlásúnak. A feladat szövege alapján:*

$$300 : 75 = P(X = 1) : P(X = 2) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} : \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

   Empirikusan a $P(X = 1)$ *valószínűség a* $\frac{\text{azon versenyzők száma, akik 1 kullancsot találtak magukban}}{\text{összes induló száma}}$ *hányadossal közelíthető, így ha* N *induló volt összesen, akkor:*

$$P(X = 1) = \frac{\frac{1}{2}^1}{1!} e^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{300}{N} \Rightarrow N \approx 990.$$

9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

   Legyen X *azon autók száma, akik az 5 perc alatt átlépik a sebességhatárt, és tegyük fel, hogy* X *eloszlása Poisson. A feladat szövege szerint:*

$$P(X = 0) = P(X > 0) = 1 - P(X = 0) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = -\ln(\frac{1}{2}) \approx 0,7$$

   Így:

$$P(X = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \approx 0,028.$$

10. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

    X *legyen a dobott szám. Ekkor* X *lehetséges értékei* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *és mindegyiknek* $\frac{1}{6}$ *a valószínűsége. Így*

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

11. A diszkrét X valószínűési változó súlyfüggvénye: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ $(x = 1, 2, 3, 4)$. Mennyi X várható értéke? És a módusza? Mennyi X^2 várható értéke? $E(\frac{1}{X}) =$?

X módusza 4 hiszen ennek a kimenetelnek legnagyobb a valószínűsége.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1^2}{30} + 2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3 \cdot \frac{3^2}{30} + 4 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{10}{3}$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1^2}{30} + 2^2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3^2 \cdot \frac{3^2}{30} + 4^2 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{354}{30}$$
$$E(\frac{1}{X}) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1^2}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{1}{3}$$

12. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-ot kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

Egy lehetséges megoldás vázlata:
Két 6x6-os táblán írjuk fel a kockadobások összes lehetséges kimenetelét. Az első táblán miden lehetséges kimenetelhez írjuk fel, hogy Albert mennyi pénzt ad Bélának, a másik táblán pedig, hogy Béla mennyi pénzt ad Albertnek. A felírt események mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűséggel fordul elő, ezért mindegyik értéket $\frac{1}{36}$-dal megszorozva és összeadva a két táblán megkapjuk, hogy Béla "átlagosan" (sok játék után a Béla által kifizetett pénz ennyi körül stabilizálódna) $\frac{35}{6}$ Ft-ot ad Aladárnak, míg "átlagosan" 7 Ft-ot kap. Így Béla jár jobban.

13. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

Tegyük fel, hogy az összes sorsjegyből húznak majd, és legyen X a nyeremény egy adott sorsjegy esetén. Ekkor:

$$E(X) = 1000000 \cdot \frac{1}{40000} + 50000 \cdot \frac{10}{40000} + 5000 \cdot \frac{100}{40000} = 50,$$

így egy sorsjegy ára 100 Ft kell hogy legyen.

14. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, egy szelvénnyel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

A találatok száma a lottón hipergeometriai eloszlású $A = 5, B = 85, n = 5$ paraméterekkel, így a k-találatos szelvény valoszínűsege: $\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$. A nyereségunk minden esetben a nyeremény-150 Ft, így ennek varható értéke:

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \cdot (-150) + \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \cdot (-150) + \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot (700 - 150) +$$
$$\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot (10000 - 150) + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot (789000 - 150) + \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \cdot (535000000 - 150) = -106.34Ft$$

15. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

Legyen X Péter "nyereménye" a játékban. Ekkor X lehetséges értékei $-100, -20, 10, 400$. Könnyen számolható, hogy ezek valószínűségei rendre $\frac{3}{6}, \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6}, \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}, \frac{1}{6}$, így

$$E(X) = -100 \cdot \frac{3}{6} + (-20) \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} + 10 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + 400 \cdot \frac{1}{6} = 15.$$

Mivel $E(x) > 0$, a játék előnyös Péter számára.

16. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

A játék akkor igazságos, ha mindkét fél esetén a "nyeremény" várható értéke 0. Nyilván most elég megkövetelni, hogy Anna nyereményének várható értéke 0 *legyen. Anna nyereményét tehát jelölje* X*, páratlan számok esetén Anna fizessen Bélának* y*-t és különböző paritású számok esetén Béla fizessen Annának* z*-t. Az utóbbi 2 esemény valószínűsége könnyen számolható, mégpedig* $P(2\ \textit{páratlan}) = \frac{3\cdot 3}{36} = \frac{1}{4}$ *és* $P(\textit{különböző paritás}) = \frac{2\cdot 3\cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$*. Így Anna várható nyereménye:*

$$E(X) = (-y)\cdot\frac{1}{4} + z\cdot\frac{1}{2}.$$

Igazságos játékhoz $E(X) = 0$ *kell, ami* $x = 2z$ *esetén teljesül, vagyis az kell, hogy az Anna által fizetett összeg kétszerese legyen a Béla által fizetett összegnek.*

17. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a) Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását! b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét és móduszát!

X lehetséges értékei 1,2,3,4,5,6.

$$P(X=1) = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$$
$$P(X=2) = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$
$$P(X=3) = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{21}$$
$$P(X=4) = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{7} = \frac{3}{21}$$
$$P(X=5) = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{21}$$
$$P(X=6) = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{21}$$

Ez alapján X *módusza* 1 *és várható értéke:*

$$E(X) = 1\frac{6}{21}\cdot + 2\cdot\frac{5}{21} + 3\cdot\frac{4}{21} + 4\cdot\frac{3}{21} + 5\cdot\frac{2}{21} + 6\cdot\frac{1}{21} = \frac{8}{3}$$

18. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

Jelölje X *a szükséges dobások számát. Ekkor* X *optimista geometria eloszlású* $p = \frac{1}{6}$ *paraméterrel, így várható értéke* $E(X) = \frac{1}{p} = 6$*. Amennyiben 2 kockával dobunk, a paraméter értéke* $\widetilde{p} = P(\textit{valamelyik kockán 6-os van}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$*-ra változik, ennek megfelelően pedig a várható érték* $\frac{1}{\widetilde{p}} = \frac{36}{11}$*.*

19. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

Jelölje X *a dobások számát. Ekkor* $X = Y + 1$*, ahol* Y *eloszlása megegyezik egy* $p = \frac{1}{6}$ *paraméterű optimista geometriai valószínűségi változó eloszlásával (a "siker" eseménye mindig változik az előző dobás értékének megfelelően). Így* $E(X) = 1 + E(Y) = 1 + \frac{1}{p} = 7$*.*

20. Piroska és Zoli kockáznak. Piroska feldob egy piros, Zoli feldob egy zöld kockát. Ha Piroska 1-et vagy 2-t dob, ő nyer, és kap Zolitól 5 Ft-ot; ha Zoli 6-ot dob, ő a nyertes, és 11 Ft-ot kap Piroskától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem előlröl kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Ferit, dobáljon ő egyetlen fehér kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes-e elfogadni Piroskának Zoli ajánlatát?

Vizsgáljuk a játékot Piroska szempontjából, és legyen X Piroska nyereménye a játék során. X lehetséges nem nulla értékei 5 és -11.

$$P(X=5)=P(\text{Piroska 1-et vagy 2-t dob és Zoli nem dob 6-ost})=\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

$$P(X=-11)=P(\text{Piroska legalább 3-at, Zoli pedig 6-ost dob})=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

Így Piroska nyereményének várható értéke:

$$E(X)=5\cdot\frac{5}{18}+(-11)\cdot\frac{2}{9}=-\frac{17}{9}$$

A módosított játékszabályák esetén Piroska nyereményét jelölje Y, melynek érékei továbbra is 5 és -11.

$$P(Y=5)=P(\text{Feri 1-et vagy 2-t dob})=\frac{2}{6}$$

$$P(Y=-11)=P(\text{Feri 6-ost dob})=\frac{1}{6}$$

$$E(Y)=5\cdot\frac{2}{6}+(-11)\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

Mivel E(Y)>E(X), ezért Piroska jól jár, ha elfogadja Zoli ajánlatát.

21. Mennyi az ötös lottón a találatok számának várható értéke?

Ötös lottón a találatok X száma hipergeometriai eloszlású $A=5, B=85, n=5$ paraméterekkel, így várható értéke $E(X)=5\cdot\frac{5}{5+85}=\frac{5}{18}$.

22. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p, illetve $q(=1-p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

Legyen X a szükséges játszmák száma. Ekkor X lehetséges értékei $3, 4$ és 5. A két játékost jelöljük A-val és B-vel, az egyes kimeneteleket pedig ezen betűkből álló szavakkal, amelyekben az i. pozícióban lévő betű az i. játszma győztesét jelöli. Ekkor

$$P(X=3)=P(AAA,BBB)=\binom{2}{0}p^3+\binom{2}{0}q^3=p^3+q^3,$$

$$P(X=4)=P(AABA,ABAA,BAAA,BBAB,BABB,ABBBB)=\binom{3}{1}p^3q+\binom{3}{1}pq^3=3p^3q+3pq^3,$$

$$P(X=5)=P(\{\text{3 db A és 2 db B, és A van a végén}\}\text{ vagy }\{\text{3 db B és 2 db A, és B van a végén}\})=$$
$$\binom{4}{2}p^3q^2+\binom{4}{2}p^2q^3=6p^3q^2+6p^2q^3,$$

valamint

$$E(X)=3(p^3+q^3)+4(3p^3q+3pq^3)+5(6p^3q^2+6p^2q^3).$$

A játszmák számának várható értéke nyilván akkor lesz a legnagyobb, amikor a játék a legkiegyenlítettebb, vagyis amikor $p=q=\frac{1}{2}$.

23. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

   Ennél a játéknál minden stratégia úgy néz ki, hogy a játékos rögzít egy k értéket, és addig játszik, amíg feketét nem dob, vagy be nem fejezi a k. kört. Rögzített k mellett:

   $$P(\text{a játékos nyer}) = P(\text{első } k \text{ dobás zöld}) = (\frac{5}{6})^k.$$

   Minden más esetben a játékos veszít. Ha X jelöli a nyereményét, akkor:

   $$E(X) = (k \cdot 100 - 250) \cdot (\frac{5}{6})^k + (-250) \cdot (1 - (\frac{5}{6})^k) = 100k(\frac{5}{6})^k - 250.$$

   Az optimális stratégiához a fenti kifejezést kell k-ban maximalizálnunk. Ehhez k szerint deriválva, és egyenlővé téve 0-val kapjuk, hogy:

   $$100(\frac{5}{6})^k + 100k(\frac{5}{6})^k \ln(\frac{5}{6}) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{-100}\ln\frac{5}{6} \approx 5,48$$

   Könnyű ellenőrizni, hogy ez valóban maximum, és hogy ha csak egész k-ra nézzük a dolgot, akkor $k = 5$ és $k = 6$ adja a legnagyobb értéket. Vagyis az optimális stratégiánál $k = 5$ vagy $k = 6$, de a várható érték ekkor is csak $E(X) = 500(\frac{5}{6})^5 - 250 \approx -49$.

24. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

    a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?

    b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

    Az első játékos páratlan sok kosárra dobás után nyerhet.

    $$P(\text{első játékos } 2k+1 \text{ dobás után nyer}) = (1 - 0,5)^k (1 - 0.6)^k 0,5 = 0,2^k 0,5$$

    Ha ezeket a valószínűségeket összeadom $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra, akkor megkapom a kívánt valószínűséget:

    $$P(\text{első játékos nyer}) = \sum_{k=0}^{\infty} 0,2^k 0,5 = \frac{0,5}{1 - 0,2} = \frac{5}{8}.$$

    A várható értékhez:

    $$P(\text{második játékos } 2k+2 \text{ dobás után nyer}) = (1 - 0,5)^{k+1} (1 - 0.6)^k 0,6 = 0,2^k 0,3.$$

    Tehát:

    $$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty}(2k+1)0,2^k 0,5 + \sum_{i=0}^{\infty}(2k+2)0,2^k 0,3 = \cdots = \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + (2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3) \sum_{i=0}^{\infty} k \cdot 0,2^k =$$

    $$\frac{11}{8} + 1,6 \cdot \frac{0,2}{1 - 0,2^2} = \frac{41}{24}.$$

    A hátralévő feladatoknál minden esetben (hol egyszerűbben, hol bonyolultabban) az egyes formulákat kell k-ban maximalizálni.

25. Határozza meg a binomiális eloszlás móduszát!

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \Rightarrow \text{módusz:} k=\lfloor (n+1)p \rfloor \text{ (ha ez egész, akkor } (n+1)p-1 \text{ is módusz)}$$

26. Határozza meg a geometriai eloszlás móduszát!

$$P(X=k)=(1-p)^k p \Rightarrow \text{módusz:} k=0$$

27. Határozza meg a Poisson eloszlás móduszát!

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \Rightarrow \text{módusz:} k=\lfloor \lambda \rfloor \text{(ha ez egész, akkor } \lambda-1 \text{ is módusz)}$$

28. Határozza meg a hipergeometrikus eloszlás móduszát!

$$P(X=k)=\frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \Rightarrow \text{módusz:} \lfloor \frac{(n+1)(A+1)}{A+B+2} \rfloor$$