VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Integrálszámítás

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2004. november

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

(D) f-nek F az I intervallumon primitív függvénye, ha $\forall x \in I$-re:
$F'(x) = f(x)$.

(Pl.) $$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}, \qquad G(x) = -\frac{\cos 2x}{4}$$

Az $I = (-\infty, \infty)$ intervallumon F és G primitív függvények, mert

$$F'(x) = G'(x) = f(x)\,, \text{ sőt } (F(x) + C)' = (G(x) + C)' = f(x)$$

(T) Ha f-nek F és G primitív függvénye I-n, akkor $\exists\, C \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + C, \quad x \in I$$

Tehát a primitív függvények csak egy állandóban különböznek.

(B) Már volt. Ez az integrálszámítás I. alaptétele.

(D) f határozatlan integrálja I-n: a primitív függvények összessége.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{ H : H'(x) = f(x) \quad x \in I\text{-re} \} = F(x) + C$$

Pl. $\int x \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + C$

(M)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ 4 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 3 + \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ -2 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = H$$

Tehát a H halmazon mindkettő primitív függvénye $\dfrac{1}{x}$-nek, de nem csak egy konstansban különböznek. Ui.:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x > 0 \\ 6, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

De most nem is intervallumon dolgoztunk!

Fontos! Az integrálszámítás alaptétele csak intervallumra igaz!

Ennek ellenére használjuk a következő jelölést:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Jelentése $\ln x + C$, ha $I \subset (0,\infty)$ és $\ln(-x) + C$, ha $I \subset (-\infty, 0)$.

A határozatlan integrál néhány tulajdonsága :

(A definíció és a deriválási szabályok következményei)

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C\,, \qquad \text{ha } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$$

$$\int f'(x)\cdot f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$$

1.1. Példák

$$\boxed{\int \sin 8x\,\mathrm{d}x} = -\frac{\cos 8x}{8} + C$$

$$\boxed{\int \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + C$$

$$\boxed{\int \frac{7\mathrm{e}^{x}+8\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x} = \int \left(7\mathrm{e}^{-x}+8\mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x = -7\mathrm{e}^{-x}+8\mathrm{e}^{x}+C$$

$$\boxed{\int (1+\mathrm{e}^{x})^2\,\mathrm{d}x} = \int (1+2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x = x+2\mathrm{e}^{x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{x}\,(1+\mathrm{e}^{x})^5\,\mathrm{d}x} = \frac{(1+\mathrm{e}^{x})^6}{6} + C$$

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$\boxed{\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \cos x \, \sin^2 x \,\mathrm{d}x} = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\boxed{\int x^3 \cos x^4 \,\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cos x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin x^4 + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{3x}\,\mathrm{d}x} = \frac{5}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln|x| + C$$

Vagy: $\frac{5}{3}\int \frac{3}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{5\ln|3x|}{3} + C$ (csak egy állandóban különböznek)

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x}\,\mathrm{d}x} = \frac{5}{3}\int \frac{3}{1+3x}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln|1+3x| + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{(1+3x)^2}\,\mathrm{d}x} = 5\cdot\frac{1}{3}\int 3(1+3x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\frac{(1+3x)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x} = 5\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = 5\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x} = 5\cdot\frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\ln\left(1+3x^2\right) + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$$

$$\boxed{\int x\mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\int 4x\mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x^2} + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x} \neq \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + C : \qquad \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x - \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2}{(2x)^2}$$

$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$-nek van primitív függvénye (később tudjuk megindokolni), de nem tudjuk előállítani zárt alakban.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin 2x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\arcsin 2x}{2} + C = \alpha$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = \frac{-1}{16}\int -16x(2-8x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\frac{(2-8x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \beta$$

$$\boxed{\int \frac{4+3x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = 4\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\alpha + 3\beta$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\arcsin\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \gamma$$

$$\boxed{\int \frac{4x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x} = -2\int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -2\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{\frac{1}{2}} - 2\gamma + C$$

$\boxed{\int \frac{1}{x^2+6x+1}\,\mathrm{d}x}$: A nevezőnek vannak valós gyökei, ilyenkor részlettörtekre bontással dolgozunk (lásd később).

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}} = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot(x+2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+6x+12}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \delta$$

$$\boxed{\int \frac{6x+6}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x} = \ln(3x^2+6x+12) + C = \varepsilon$$

$$\boxed{\int \frac{6x+8}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{6x+6}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x = \varepsilon + 2\delta$$

$$\boxed{\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x} = -\int \frac{-2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1+\cos^2 x) + C$$

$$\boxed{\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x} = \operatorname{arctg}\cos x + C$$

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x} = \int |\sin x| \cos^{-\frac{3}{2}} x \,\mathrm{d}x = \int -\sin x \cos^{-\frac{3}{2}} x \,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{-\frac{1}{2}} x}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

2. Határozott integrál

2.1. Jelölések, definíciók

A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és f korlátos $[a, b]$-n.

Néhány definíció

(D) Osztópontok: x_k; $k = 0, 1, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$

(D) A k-adik részintervallum: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, hossza: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$.

(D) $[a, b]$ egy felosztása: $F = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ (= P-vel is jelöljük)

(D) Alsó közelítő összeg (vagy alsó összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad m_k = \inf_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

(D) Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad M_k = \sup_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

(D) Az F felosztás finomsága: $\Delta F = \max_k \Delta x_k$

(D) Az $[a, b]$ intervallum (F_n) felosztásainak sorozatát minden határon túl finomodónak (m.h.t.f.f.s.) nevezzük, ha

$$\lim_{n \to \infty} \Delta F_n = 0$$

●●●

Az alsó és felső összeg tulajdonságai:

(T₁) $\boxed{s_F \leq S_F}$

(B) $m_k \leq M_k$-ból következik.

$\blacksquare$

(T₂) $\boxed{F^*:\ F\text{-ből egy új osztópont elhelyezésével származik. Ekkor}}$

F^* : F-ből egy új osztópont elhelyezésével származik. Ekkor

$$s_F \le s_{F^*} \le S_{F^*} \le S_F$$

Tehát a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg (a.k.ö.) nem csökkenhet, a felső közelítő összeg (f.k.ö.) nem nőhet.

(B) $s_F \le s_{F^*}$ -ot bizonyítjuk. Az új osztópont kerüljön I_k-ba.

$$s_{F^*} - s_F = m_k'\left(x^* - x_{k-1}\right) + m_k''\left(x_k - x^*\right) - m_k\left(x_k - x_{k-1}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(m_k' - m_k\right)}_{\ge 0}\underbrace{\left(x^* - x_{k-1}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(m_k'' - m_k\right)}_{\ge 0}\underbrace{\left(x_k - x^*\right)}_{>0} \ge 0$$

$\blacksquare$

(T₃) $\boxed{s_{F_1} \le S_{F_2}, \quad F_1, F_2 \text{ tetszőleges. Tehát bármely a.k.ö.} \le \text{bármely f.k.ö.-nél.}}$

(B) Az egyesített felosztás segítségével:

$$s_{F_1} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\le} s_{F_1 \cup F_2} \underset{T_1 \text{ miatt}}{\le} S_{F_1 \cup F_2} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\le} S_{F_2}$$

$\blacksquare$

(T₄) $\boxed{\exists \ \sup\{s_F\} = h \ \text{ és } \ \inf\{S_F\} = H}$

$$h = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ Darboux-féle alsó integrál,} \quad H = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ Darboux-féle felső integrál}$$

(B)

$\{s_F\}$ felülről korlátos számhalmaz, hiszen bármely f.k.ö. felső korlát.

$$\underset{\text{Dedekind t.}}{\Longrightarrow} \quad \exists \text{ szuprémuma.}$$

$\{S_F\}$-re hasonlóan bizonyítható. $\blacksquare$

(T₅) $\boxed{h \le H}$

(B) $s_{F_1} \le S_{F_2} \quad \forall\, F_1\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h \le S_{F_2} \quad \forall\, F_2\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h \le H$

$\blacksquare$

A határozott integrál definíciója:

(D) Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a,b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, ha $h = H = I$. Ezt a közös I számot az f függvény $[a,b]$-beli határozott integráljának nevezzük és

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f$$

módon jelöljük. (f: integrálandó függvény vagy integrandusz.)

(Pl.) $f(x) \equiv c \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b c\,\mathrm{d}x = ?$

$$s_F = \sum_{k=1}^n m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

$h = \sup\{s_F\} = c\,(b-a) = \inf\{S_F\} = H$

Tehát

$$\boxed{\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)}$$

(Pl.) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = ?$

$$s_F = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0 \quad \forall\, F\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h = 0$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a = 2 - 1 \quad \forall\, F\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad H = 1 \neq h$$

$\Longrightarrow \quad \nexists \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \quad$ (Más intervallumon sem integrálható!)

(D) Jelölés:

$R_{[a,b]}$ vagy $\sum_{[a,b]}$ az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza.

3. A Riemann integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

Legyen $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Segédtétel:

(T) Ha (F_n) m.h.t.f.f.s., akkor s_{F_n} és S_{F_n} konvergensek és

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = h; \quad \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = H. \qquad (\neg B)$$

(T_1)

1. Ha $\int\limits_a^b f(x)\,dx\ \exists \quad \Longrightarrow \quad \forall F_n$ m.h.t.f.f.s-ra: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$
2. Ha $\exists F_n$ m.h.t.f.f.s., melyre $\lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n} = I \quad \Longrightarrow \quad \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx$ és $= I$.

(B)

1. A Segédtétel miatt: $\quad s_{F_n} \to h \ \wedge\ S_{F_n} \to H$

   De az integrálhatóság miatt: $\quad h = H = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2. A Segédtétel miatt: $\quad s_{F_n} \to h \ \wedge\ S_{F_n} \to H$

   A feltétel miatt azonban $\quad h = H (:= I) \quad \Longrightarrow \quad \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx$ és $= I$.

■

(D) Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \le O_F := S_F - s_F = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

(T_2)

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx \iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists F:\quad O_F < \varepsilon$$

(B)

1. $\Longrightarrow \quad \varepsilon \to \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, F^*$ és F^{**}, hogy $h - s_{F^*} < \dfrac{\varepsilon}{2} \;\wedge\; S_{F^{**}} - H < \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $F := F^* \cup F^{**}$ (egyesített felosztás)

   Tudjuk: $s_{F^*} \le s_F \le S_F \le S_{F^{**}}$ Ebből:

$$0 \le O_F = S_F - s_F \le S_{F^{**}} - s_{F^*} = \underbrace{S_{F^{**}} - H}_{\ge 0} + \underbrace{h - s_{F^*}}_{\ge 0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $\Longleftarrow$

   Mivel $s_F \le h \le H \le S_F$ mindig fennáll:

$$0 \le H - h \le S_F - s_F = O_F < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \quad \Longrightarrow \quad H = h,$$

   vagyis f Riemann integrálható $[a,b]$-n. ■

(D) Az f függvény F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}),$$

ahol $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$: reprezentáns pont,
$f(\xi_k)$: reprezentáns függvényérték.

(M1) Geometriai tartalom: a függvénygörbe alatti (előjeles) terület közelítő értéke.

(M2) $s_F \le \sigma_F \le S_F$ mindig fennáll.
Ugyanis minden részintervallumon teljesül, hogy $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$. Ebből már következik az állítás.

(T3)

1. $\exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I \quad \Longrightarrow \quad \forall F_n$ m.h.t.f.f.s-ra a reprezentáns pontok választásától függetlenül a σ_{F_n} integrálközelítő összeg sorozatra fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

2. $\exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I \quad \Longleftarrow \quad \exists F_n$ m.h.t.f.f.s., hogy a reprezentáns pontok választásától függetlenül $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{F_n} = I$.

(B)

1. Nyilvánvaló T_1-ből, ugyanis $\underset{\substack{\downarrow \\ I}}{s_{F_n}} \leq \sigma_{F_n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ I}}{S_{F_n}} \implies \sigma_{F_n} \to I.$ ∎

2. ¬B

(M) Fontos, hogy a határérték a reprezentáns pontok választásától függetlenül létezzen.

Pl. a Dirichlet-függvényre tetszőleges F_n m.h.t.f.f.s-ra:

ξ_k rac. esetén: $\sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = b - a \to b - a$

ξ_k irrac. esetén: $\sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \to 0.$

4. Elégséges tételek Riemann integrálhatóságra

(T_1) $\boxed{f:\ [a,b] \to \mathbb{R} \text{ korlátos és monoton} \implies f \in R_{[a,b]}}$

(B) f legyen monoton növő!

$\Delta x_k := \dfrac{b-a}{n}$ (egyenletes felosztás; ekvidisztáns alappontok)

$$O_F = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) =$$
$$= \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$
$$= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

Tehát $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists F:\ O_F < \varepsilon$ ($F:\ I$-t n egyenlő részre osztjuk, az $n > \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ feltétel teljesülése mellett.)

∎

(T_2) $\boxed{f \in C^0_{[a,b]} \implies f \in R_{[a,b]}}$

(B) Belátjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists F:\ O_F < \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ legyen tetszőleges. $f \in C^0_{[a,b]} \implies f$ egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, vagyis
$\forall\, \varepsilon^* := \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon^*)$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon^*\,, \text{ ha } \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon^*)\,; \quad x_1, x_2 \in [a,b]$$

F_n legyen egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat, tehát $\Delta F_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$.
Ezért $\exists\, n_0 :\ \Delta F_{n_0} < \delta(\varepsilon^*) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Erre az F_{n_0} felosztásra igaz:

$$O_{F_{n_0}} = S_{F_{n_0}} - s_{F_{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} (M_k - m_k)\Delta x_k =$$

A folytonosság miatt f felveszi szuprémumát ill. infimumát (W. II. t.)

$$= \sum_{k=1}^{n_0} \left(f\left(\xi_k'\right) - f\left(\xi_k''\right)\right) \Delta x_k <$$

$|\xi_k' - \xi_k''| \le \Delta x_k < \delta(\varepsilon^*)\,,$ így az egyenletes folytonosság miatt $0 \le f(\xi_k') - f(\xi_k'') < \varepsilon^*$

$$< \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon^* \Delta x_k = \varepsilon^* \sum_{k=1}^{n_0} \Delta x_k = \varepsilon^*(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Tehát $F = F_{n_0}$. ■

T3 $\boxed{f \text{ korlátos és egy pont kivételével folytonos } [a,b]\text{-n} \implies f \in R_{[a,b]}}$

B Belátjuk, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, F :\ O_F < \varepsilon$.
Az intervallumot 3 részre osztjuk. (f az x_0 pontban nem folytonos)

1. Vizsgálat

   $$O_{II} = (M_{II} - m_{II}) \cdot 2\delta \underset{|f(x)| \le K}{\le} 2K \cdot 2\delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Feltétel: $\delta < \dfrac{\varepsilon}{12K}$ (ε, K adott). Ilyen δ-t választva $O_{II} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

2. $[a, x_0 - \delta]$-n f folytonos $\implies \exists F^{(1)} :\ O_I = O_{F^{(1)}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$

3. $[x_0 + \delta, b]$-n f folytonos $\implies \exists F^{(2)} :\ O_{III} = O_{F^{(2)}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$

F: a 3 felosztás egyesítése:

$$O_F = O_I + O_{II} + O_{III} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ ■

A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

(T) Ha f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $[a,b]$-n, akkor integrálható $[a,b]$-n.

(T) Egy Riemann integrálható függvény értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz.

(T) Ha $f \in R_{[-a,a]}$ és

$$f \text{ páratlan: } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$f \text{ páros: } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Newton–Leibniz-tétel

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$ és itt létezik primitív függvénye (F), azaz $x \in [a,b]$-re $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

(B) F_n: m.h.t.f.f.s.

$$\underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\downarrow \\ F(b)-F(a), \\ \text{ha } n\to\infty}} = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right) =$$

a Lagrange-féle k.é.t. miatt

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\substack{\downarrow \\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{ha } n\to\infty}}{\sigma_{F_n}^{f}}$$

■

Pl. $\boxed{\int\limits_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x} = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$

Pl. $\boxed{\int\limits_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x} = -\cos x|_0^{2\pi} = -1-(-1) = 0$

Pl. $\boxed{\int\limits_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x} = -\cos x|_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$

M Mindkét feltétel fontos a Newton–Leibniz-tételben. Az alábbi példák mutatják, hogy egyik sem hagyható el.

Pl. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \nexists$, mert f nem korlátos, de $\exists$ primitív függvény.

Pl. $\int\limits_0^5 \operatorname{sgn}(x^2-5x+6)\,\mathrm{d}x \ \exists$, mert f 2 pont kivételével folytonos. De $F \nexists$, mert egy deriváltfüggvénynek (f lenne) nem lehet elsőfajú szakadása.

6. A Riemann integrál tulajdonságai

D $f \in R_{[a,b]}$ $(b > a)$ $\quad \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

D $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ (az előzővel összhangban)

(T) Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$ $(a < c < b)$ $\Longrightarrow$ $f \in R_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\neg\text{B})$$

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$ $\Longrightarrow$ $f \in R_{[a,c]}$, ha $c \in [a,b]$ (¬B)

(T) Ha $f, g \in R_{[a,b]}$ $\Longrightarrow$ $f + g \in R_{[a,b]}$ és $c \cdot f \in R_{[a,b]}$
Tehát $R_{[a,b]}$ lineáris tér (vektortér).

(B) Pl. $f + g$-re:

F_n: m.h.t.f.f.s.; reprezentáns pontok: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\sigma_{F_n}^f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_1$$

$$\sigma_{F_n}^g = \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = I_2$$

a reprezentáns pontok választásától függetlenül.

$$\Longrightarrow \quad \sigma_{F_n}^{f+g} = \sum_{k=1}^n (f+g)(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k \to I_1 + I_2$$ ■

(D) $\Phi: \ H \to \mathbb{R}$ leképezés (operátor) funkcionál, ha

H: tetszőleges halmaz, $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.

(D) $\Phi: \ H \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, ha
H: lineáris tér a valós számok teste felett, $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.
Φ lineáris operátor, tehát $\Phi(cx) = c\Phi(x)$, $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$.

Pl. $\Phi(f) := \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\Phi: \ R_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál.
Ui. igaz: $\Phi(cf) = c\Phi(f)$ (homogén), $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ (additív).

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$, ha $x \in [a,b]$ $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

(B) $\sigma_F^f \geq 0 \ \forall F$-re $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\Delta F \to 0} \sigma_F^f \geq 0$ ■

Ⓣ Ha $f, g \in R_{[a,b]}$ és $f(x) \le g(x) \quad x \in [a,b]$-ben $\implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Ⓑ $h(x) := g(x) - f(x) \ge 0$ + előző tételek. ■

Tehát

$$\begin{array}{ll} f \ge 0: & \Phi(f) \ge 0 \\ f \le g: & \Phi(f) \le \Phi(g) \quad \text{(monotonitás)} \end{array}$$

7. Az integrálszámítás középértéktétele

Ⓓ Integrálközép: $$\varkappa := \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \qquad (b > a)$$

Ⓣ

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, akkor $m \le \varkappa \le M$.
2. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor $\exists\, \xi \in [a,b]$, hogy $f(\xi) = \varkappa$.

Ⓑ

1. Mivel $m \le f(x) \le M$, az integrál monotonitása miatt:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$$

Innen $(b-a)$-val való osztással adódik az állítás.

2. Weierstrass II. tétele miatt f felveszi m-et és M-et, tehát

$$\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b], \text{ hogy } \quad f(\xi_1) = m \text{ és } f(\xi_2) = M$$

$[\xi_1, \xi_2]$-re (ill. $[\xi_2, \xi_1]$-re) alkalmazható a Bolzano-tétel. Mivel $m \le \varkappa \le M$, a Bolzano-tétel értelmében

$$\exists\, \xi \in [\xi_1, \xi_2] \text{ (ill. } \xi \in [\xi_2, \xi_1]), \text{ hogy } f(\xi) = \varkappa$$

■

•••

(D) Az f függvény f^+ pozitív részét és f^- negatív részét a következőképpen definiáljuk:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) > 0 \end{cases}$$

(M) Könnyen látható, hogy $f = f^+ + f^-$ és $|f| = f^+ - f^-$.

(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$, ahol $a < b$, akkor

1. $f^+ \in R_{[a,b]}$, $f^- \in R_{[a,b]}$ és $|f| \in R_{[a,b]}$
2. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

(B)

1. Az oszcillációs összegekre vonatkozó szükséges és elégséges tételből következik, mivel $O_P^{f^+} \leq O_P^f < \varepsilon$ és $O_P^{f^-} \leq O_P^f < \varepsilon$, ezért f^+ illetve f^- Riemann integrálható, valamint különbségük $|f| \in R_{[a,b]}$.
2. Mivel
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,,$$
ezért az integrál monotonitása miatt
$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
amit bizonyítani kellett. ■

(M) Ha nem tesszük fel, hogy $a < b$, akkor a 2. tétel állítása
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right|$$
alakú lesz.

Az alábbi függvény példa arra, hogy ha $|f| \in R_{[a,b]}$, akkor $f \in R_{[a,b]}$ nem feltétlenül teljesül.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$ folytonos $\implies$ $|f| \in R_{[a,b]}$, de $f \notin R_{[a,b]}$

7.1. Feladatok

1. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -3, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

   Léteznek-e az alábbi integrálok?

   a) $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

   b) $\int\limits_0^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$

   c) $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$

2. A középértéktétel felhasználásával becsülje meg az

   $$\int\limits_0^3 \sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

   integrál értékét!

3. Határozza meg az

   $$f(x) = \cos^3 x$$

   függvény $[0,\pi]$ intervallumbeli integrálközepét!

4. Adjon 0-tól különböző alsó, illetve felső becslést az

   $$\int\limits_0^1 \frac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

   integrál értékére!

5. Mutassa meg, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség!

   a) $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{8}$

   b) $0 < \int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < 1$

   c) $\frac{1}{\mathrm{e}} < \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$

d) $\dfrac{e-1}{2e} < \int\limits_0^1 x e^{-x^3}\,dx$

e) $\left|\int\limits_0^1 \dfrac{\cos cx^3}{x+1}\,dx\right| \le \ln 2\,,\qquad c$ tetszőleges valós szám

6. $\int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sgn} x \cdot x^2 \cdot \cos x\,dx = ?$

7. $\int\limits_0^2 \sqrt{1-2x+x^2}\,dx = ?$

8. $\int\limits_{-2}^{3} |x^3-2x^2|\,dx = ?$

8. Integrálfüggvény

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x\in[0,1] \\ 3x-2, & \text{ha } x \in (1,2] \end{cases}$$

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = ?\,,\ \text{ha}\ \ x\in[0,2];\qquad F'(x) = ?$$

Megoldás:
Ha $x \in [0,1]$:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

Ha $x \in (1,2]$:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^1 t\,dt + \int\limits_1^x (3t-2)\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(3\,\frac{t^2}{2} - 2t\right)\right|_1^x = \frac{3}{2}\,x^2 - 2x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x\in[0,1] \\ \dfrac{3}{2}x^2-2x+1, & \text{ha } x\in(1,2] \end{cases}\qquad F'(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0\le x<1 \\ 3x-2, & \text{ha } 1<x\le 2 \\ 1, & \text{ha } x=1 \end{cases}$$

Tehát $F'(x) = f(x)$. Látni fogjuk, hogy ez nem véletlen.

(D) $f \in R_{[a,b]}$. Az

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad x \in [a,b]$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

Az integrálszámítás II. alaptétele

(T)

$$f \in R_{[a,b]}; \qquad F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

1. Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben.
2. Ha még f folytonos is $x_0 \in (a,b)$-ben, akkor F differenciálható x_0-ban és
$$F'(x_0) = f(x_0).$$

(B)

1. $f \in R_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, K:\ |f(x)| \le K$. Mi csak belső pontra bizonyítunk. Legyen $x_0 \in (a,b)$. Meg kell mutatnunk, hogy
$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\,,\ \text{ha}\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$
$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int\limits_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \le$$
$$\le \left|\int\limits_{x_0}^x K\,\mathrm{d}t\right| = |K(x - x_0)| = K|x - x_0| < \varepsilon,\ \text{ha}\ |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta(\varepsilon)$$

2. $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,,$ ha $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon) > 0:$
$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon\,, \qquad \text{ha}\ 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$
$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}\right| =$$

$$= \left| \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t}{x - x_0} \right| \le \frac{\left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \right|}{|x - x_0|} := \circledast$$

Mivel f folytonos x_0-ban, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

(Legyen x ilyen!) Most $|t - x_0| \le |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, így ezzel a $\delta(\varepsilon)$-nal

$$\circledast < \frac{\left| \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t \right|}{|x - x_0|} = \frac{|\varepsilon(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \varepsilon$$

Következmény:

1. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor $\forall x \in (a,b)$-re $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenciálható és

   $F'(x) = f(x)$.

2. Folytonos függvénynek mindig létezik primitív függvénye.

■

8.1. Példák

Pl. $\boxed{F(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$

A függvényt zárt alakban nem tudjuk előállítani, de a következőket tudjuk róla:
$F(0) = 0$
$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0: \quad F$ szig. monoton nő
$F''(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}: \quad x < 0: \ F$ alulról konvex, $\quad x > 0: F$ alulról konkáv
A függvény páratlan: $F(-x) = \int\limits_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t := -u}{=} \int\limits_0^{x} \mathrm{e}^{-(-u)^2}(-1)\,\mathrm{d}u = -F(x)$

(Helyettesítés hátrébb!)

(Pl.) Keresse meg az alábbi függvények deriváltjait!

$$F(x) = \int_0^x \sin t^2 \, \mathrm{d}t, \quad x \neq 0$$

$$G(x) = \int_0^{\mathrm{e}^x} \sin t^2 \, \mathrm{d}t$$

$$H(x) = \int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^x+1} \sin t^2 \, \mathrm{d}t$$

$f(t) = \sin t^2$ folytonossága miatt $\exists F'(x)$ és $F'(x) = \sin x^2$.

$G(x) = F(\mathrm{e}^x)$ deriválható, mert deriválható függvények összetétele. A láncszabállyal:

$$G'(x) = F'(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^x = (\sin \mathrm{e}^{2x}) \cdot \mathrm{e}^x$$

$H(x) = F(\mathrm{e}^x + 1) - F(\mathrm{e}^x)$ szintén a láncszabállyal deriválható:

$$H'(x) = F'(\mathrm{e}^x + 1) \cdot \mathrm{e}^x - F'(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^x = (\sin (\mathrm{e}^x + 1)^2) \cdot \mathrm{e}^x - (\sin \mathrm{e}^{2x}) \cdot \mathrm{e}^x$$

(Pl.) $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 \, \mathrm{d}t}{x^2} = ?$$

$\dfrac{0}{0}$ alakú és alkalmazható a L'Hospital szabály:

(A számláló $\operatorname{arctg} t^2$ folytonossága miatt deriválható)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 \, \mathrm{d}t}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x}{2} = 0$$

(Pl.) $$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{ha } 0 \le t < 1 \\ t - 1, & \text{ha } 1 \le t \le 2 \end{cases} \qquad F(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

1. $F''(1) = ?$
2. A $(0, 2)$ intervallumon hol konvex ill. konkáv az F függvény?

f folytonossága miatt $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ x - 1, & \text{ha } 1 \le x < 2 \end{cases}$

$F''(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$

F' folytonos 1-ben. $g(x) = 1 - x^2$, $h(x) = x - 1$ mindenütt deriválható. Így

$$F''_-(1) = F''(1 - 0) = -2 \neq 1 = F''_+(1) = F''(1 + 0)$$

Tehát $\nexists F''(1)$.

F $(0, 1)$-ben konkáv ($F'' < 0$ itt) és $(1, 2)$-ben konvex ($F'' > 0$ itt).

8.2. Feladatok

1. a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^b \cos(x^3+1)\,\mathrm{d}x = ?$

   b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int\limits_a^b \cos(x^3+1)\,\mathrm{d}x = ?$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int\limits_a^b \cos(x^3+1)\,\mathrm{d}x = ?$

2. $F(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t;\qquad G(x) = \int\limits_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad H(x) = \int\limits_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

   Határozza meg a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

3. $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}(x^2-4)\,\mathrm{d}x$

   a) Hol monoton f? Hol van lokális szélsőértéke?

   b) Hol konvex, hol konkáv? Hol van inflexiós pontja?

4. $f(x) = \int\limits_0^x x^2 \arcsin x\,\mathrm{d}x$

   a) Milyen pozitív x-ekre differenciálható f?

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x x^2 \arcsin x\,\mathrm{d}x}{x}$

   c) Írja fel a függvény $x_0 = \dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

5. $f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{ha } -1 \le t \le 0 \\ -t+1, & \text{ha } 0 < t \le 1 \end{cases}$

   a) Írja fel a $G(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ függvényt! $(x \in [-1,1])$

   b) Differenciálható-e a felírt G függvény $(-1,1)$-ben?

6. $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{8t^7+5t^3+2t+6}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,3]$

   a) Van-e f-nek lokális szélsőértéke $(0,3)$-ban?

   b) Hol veszi fel a függvény $[0,3]$-ban a minimumát, illetve maximumát? (A minimum, ill. maximum értéke nem kell.)

c) Van-e inflexiós pontja f-nek?

9. Integrálás helyettesítéssel

(T) Legyen $f \in C^0_{[a,b]}$, $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ szigorúan monoton és $\varphi(t) \in [a,b]$, ha $t \in [\alpha,\beta]$ $([\beta,\alpha])$.

1. Ekkor

   $\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \qquad t \in [\alpha,\beta]$

   (Vagyis $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$)

2. Ha $\varphi(\alpha) = a$ és $\varphi(\beta) = b$: $\qquad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

(B)

1. Az integranduszok folytonossága miatt mindkét határozatlan integrál létezik. Legyen

   $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad x \in [a,b].$$

   Azt kell belátnunk, hogy $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ primitív függvénye $F(\varphi(t))$ $\quad [\alpha,\beta]$-ban:

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

2.

   $$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

   és

   $$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

■

10. Integrálási módszerek

10.1.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Ezen azonosságok felhasználásával:

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\,(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\,(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\,(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

Pl. $\boxed{\int \sin\pi x \cdot \cos 5x \,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int (\sin(\pi+5)x + \sin(\pi-5)x)\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(\pi+5)x}{\pi+5} - \frac{\cos(\pi-5)x}{\pi-5}\right) + C$$

Feladatok:

1. $\int \sin\sqrt{2}x \cdot \sin 3x \,\mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos 3x \cdot \cos 8x \,\mathrm{d}x = ?$

10.2. $\sin$ és $\cos$ páratlan kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot (\sin^2 x)^n = \sin x(1-\cos^2 x)^n = \ldots$$
$$\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot (\cos^2 x)^n = \cos x(1-\sin^2 x)^n = \ldots$$

(Az átalakítás után a hatványozás elvégzése szükséges)

Pl. $\boxed{\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x} = \int \sin x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x =$

$$= \int (\sin x - \sin x\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Feladatok:

1. $\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos^7 x \, \mathrm{d}x = ?$

10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n = \dots$$
$$\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n = \dots$$

(Azonos átalakítás a kitevőt csökkenti)

Pl. $\boxed{\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x} = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

Feladatok:

1. $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos^6 x \, \mathrm{d}x = ?$

10.4.

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, \mathrm{d}x = ? \qquad n, m \in \mathbb{N}^+$

1. n és m közül legalább az egyik páratlan:

   Pl. $\boxed{\int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x} = \int \sin x \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x (\cos^4 x - \cos^6 x) \, \mathrm{d}x =$

   $$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

   Feladat:
   $\int \cos^3 x \sin^5 x \, \mathrm{d}x = ?$

2. n és m is páros:

Pl. $\boxed{\int \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \,\mathrm{d}x} = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

10.5. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad (u,v \in C_I^1)$$

deriválási szabályából

$$u(x)\cdot v'(x) = (u(x)\cdot v(x))' - u'(x)\cdot v(x)$$

és ebből adódik a parciális integrálás módszere:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x\in I}$$

Az alábbi három esetet kell felismerniük:

1.

$$\int \underset{u}{\text{polinom}} \cdot \underset{v'}{\left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{matrix}\right\}} \,\mathrm{d}x \quad = ?$$

(n-edrendű polinomnál n-szer kell parciálisan integrálni.)

Pl. $\boxed{\int \underset{\substack{u=x^2 \\ u'=2x}}{x^2} \quad \underset{\substack{v'=\mathrm{e}^{5x} \\ v=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}}}{\mathrm{e}^{5x}} \,\mathrm{d}x} = x^2\,\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{5}\int \underset{\substack{u=x \\ u'=1}}{x} \quad \underset{\substack{v'=\mathrm{e}^{5x} \\ v=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}}}{\mathrm{e}^{5x}} \,\mathrm{d}x =$

$$= x^2\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{5x}\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125}\right) + C$$

Feladatok:

a) $\int (2x+1)\sin 6x \,\mathrm{d}x = ?$
b) $\int (x^2+1)\cos^2 x \,\mathrm{d}x = ?$
c) $\int x\cos x \sin x \,\mathrm{d}x = ?$
d) $\int x^2 \operatorname{sh} 2x \,\mathrm{d}x = ?$

2.

$$\int \underbrace{\text{polinom}\cdot}_{v'} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \operatorname{arsh} ax \\ \vdots \end{Bmatrix}}_{u} \mathrm{d}x \;= ?$$

Pl. $\boxed{\int \ln x \,\mathrm{d}x} = \int \underset{\substack{v'=1 \\ v=x}}{1} \; \underset{\substack{u=\ln x \\ u'=\frac{1}{x}}}{\ln x} \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

Feladatok:

a) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = ?$
b) $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = ?$

3.

$$\int \begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{bx} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{sh} bx \\ \operatorname{ch} bx \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = ?$$

(Két parciális integrálással oldható meg.)

Bizonyos párosításokat sokkal egyszerűbben is integrálhatunk. Melyek ezek?

De pl. az alábbi integrált csak így tudjuk kiszámolni:

Pl. $\boxed{\int \mathrm{e}^{3x} \, \sin 2x \,\mathrm{d}x \; = ?}$

$$\int \underset{\substack{u=\mathrm{e}^{3x}\\ u'=3\mathrm{e}^{3x}}}{\mathrm{e}^{3x}} \quad \underset{\substack{v'=\sin 2x\\ v=-\frac{\cos 2x}{2}}}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int \underset{\substack{u=\mathrm{e}^{3x}\\ u'=3\mathrm{e}^{3x}}}{\mathrm{e}^{3x}} \quad \underset{\substack{v'=\cos 2x\\ v=\frac{\sin 2x}{2}}}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{3x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

Ezt az egyenletet kell megoldani a keresett integrálra:

$$\int \mathrm{e}^{3x}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3x}\sin 2x\right) + C$$

Másik lehetőség: parciálisan integrálunk két különböző kiosztással, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk az eredeti integrálra.

$$X = \int \underset{u=\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}} \quad \underset{v'=\sin 2x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \underbrace{\int 3\mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x}_{\frac{3}{2}Y}$$

$$X = \int \underset{v'=\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}} \quad \underset{u=\sin 2x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x}\frac{1}{3}\sin 2x - \underbrace{\int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,2\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{-\frac{2}{3}Y}$$

(Ezt az egyenletrendszert kell megoldani X-re.)

10.6. Racionális törtfüggvények integrálása

1. lépés: Valódi törtfüggvény-e? Ha nem, osztással átalakítjuk egy racionális egész függvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegére.
2. lépés: A valódi törtfüggvény nevezőjében lévő polinomot felírjuk valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.
3. lépés: Résztörtekre bontunk.

Pl. $\boxed{\int \frac{2x^4+3x^3-18x^2+8x+1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

Áltört: $(2x^4+3x^3-18x^2+8x+1) : (x^2+2x-8) = 2x^2-x\,,$ maradék=1

$$X = \int\left(2x^2-x+\frac{1}{x^2+2x-8}\right)\mathrm{d}x = \int\left(2x^2-x+\frac{1}{6}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x+4| + C$$

Ugyanis $\quad \dfrac{1}{x^2+2x-8} = \dfrac{1}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+4}$

Az együtthatók meghatározása:

1. Behelyettesítéssel (közös nevezőre hozás után a számlálókat egyeztetve):
   $$1 = A(x+4) + B(x-2)$$
   $x = -4: \quad 1 = B(-6) \qquad B = -\dfrac{1}{6}$

   $x = 2: \quad 1 = A\cdot 6 \qquad A = \dfrac{1}{6}$

2. Együttható összehasonlítással: $\qquad 1 = (A+B)x + 4A - 2B$

   $4A - 2B = 1$ és $A + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = \dfrac{1}{6},\ B = -\dfrac{1}{6}$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \quad \Longrightarrow \quad A = 1,\ B = -1,\ C = 1$$

$$X = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x + C$$

Feladatok:

$\int \dfrac{2x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = ?$

$\int \dfrac{2x^2+1}{x^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x \left(= \int \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{x^2} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x = \cdots\right) = ?$

$\int \dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x \left(= \int \left(1 + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \cdots\right) = ?$

10.7. Integrálás helyettesítéssel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

1. $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a\neq 0}$

Teljes négyzetté kiegészítéssel az alábbi alakok valamelyikére hozzuk:

$\sqrt{1-A^2}$ $\quad A := \sin t, \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (vagy $A := \cos t, \quad t\in[0,\pi]$

$\sqrt{B^2+1}$ $\quad B := \operatorname{sh} t$

$\sqrt{C^2-1}$ $\quad C := \operatorname{ch} t$

A $\cos^2 t + \sin^2 t = 1; \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságok felhasználásával elvégezhető a gyökvonás.

Pl. $\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$x = \sin t\ (=\varphi(t)) \quad \Longrightarrow \quad t = \arcsin x$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t\ (=\varphi'(t)) \qquad (\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t)$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,\mathrm{d}t = \int |\cos t|\ \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \qquad t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$X = \left(\frac{1}{2}t + \frac{2}{4}\sin t\ \sqrt{1-\sin^2 t} + C\right)\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Határozott integrál esetén:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \qquad a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$$

Pl. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Feladatok:

a) $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\int x^3\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

d) $\int \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,\mathrm{d}x = ?$
(Ez elemi úton is integrálható, mert $\int f' f^\alpha\,\mathrm{d}x$ alakú. Csinálja meg mindkét módon!)

Racionális törtfüggvény integráljára vezető helyettesítések

2. $\boxed{\displaystyle\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x}$

$$\mathrm{e}^x := t \longrightarrow x = \ln t \longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{-1}{1+t}+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\ln|1+t| + \ln|t| + C$$

Ugyanis $\qquad \dfrac{1}{(1+t)t} = \dfrac{A}{1+t} + \dfrac{B}{t}$

$$1 = At + B(1+t) \longrightarrow t=0:\ B=1,\ t=-1:\ A=-1$$

Ennek megfelelően a megoldás:

$$X = -\ln(1+\mathrm{e}^x) + x + C$$

Feladatok:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = ?$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x} = ?$

3. $\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \sqrt[n]{ax+b} := t}$

Pl. $\boxed{\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\sqrt{x-2} := t \quad \longrightarrow \quad x = t^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{t^2-1}{(t^2+3)\,t}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2t - \frac{8}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

$$X = 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{3}} + C$$

Feladatok:

a) $\int x\sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\int (2x+1)\sqrt{(5x-3)^3}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = ?$

d) $\int \frac{3x^2+4}{\sqrt[3]{6x-4}}\,\mathrm{d}x = ?$

4. $\boxed{\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}}\ (i = 1, 2, \ldots, n)\right)\,\mathrm{d}x \quad t := x^{\frac{1}{q}}, \quad q:\ q_1, \ldots, q_n}$ **legkisebb közös többszöröse**

Pl. $\boxed{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{d}x = ?} := X \qquad q_1 = 2,\ q_2 = 4,\ q = 4$

$$t = x^{\frac{1}{4}} \quad \longrightarrow \quad x = t^4 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1}\,4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t^2 - \frac{1}{3}\,\frac{3t^2}{t^3+1}\right)\mathrm{d}t = 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\,\ln|t^3+1| + C$$

$$X = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$$

Feladatok:

a) $\int \frac{1+x^{\frac{3}{2}}}{3-x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\int \frac{1}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}}\,\mathrm{d}x = ?$

5. $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$

$$t := \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \longrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}\right)$$

Pl. $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,(1+\cos x)} = ?} := X$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{4} + C$$

$$X = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + C$$

Pl. $\boxed{\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1}{t\,(1-t)\,(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \ldots$$

Feladatok:

a) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = ?$

11. Improprius integrál

11.1. Definíciók

11.1.1. Ha az intervallum nem korlátos

(D) Ha $\forall\,\omega \in (a,\infty)$-re $f \in R_{[a,\omega]}$:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

(Pl.) $\boxed{\int\limits_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

Részlettörtekre bontással kell dolgoznunk.

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \;\longrightarrow\; 6 \;=\; A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=-2: \quad B=-2\,, \qquad x=1: \quad A=2$$

$$X = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_2^\omega \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_2^\omega \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\lim_{\omega\to\infty} \left(\ln(x-1) - \ln(x+2)\right)\Big|_2^\omega = 2\lim_{\omega\to\infty} \left(\underbrace{\ln(\omega-1) - \ln(\omega+2)}_{\infty-\infty \text{ alakú}} - (\ln 1 - \ln 4)\right) =$$

$$= 2\lim_{\omega\to\infty} \left(\underbrace{\ln\frac{\omega-1}{\omega+2}}_{\ln\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{2}{\omega}}\to 0} + \ln 4\right) \;=\; 2\,\ln 4$$

(D) Ha $\forall\,\omega \in (-\infty,b)$-re $f \in R_{[\omega,b]}$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to-\infty} \int\limits_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln(2-x)}}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$X = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{-1} \underbrace{\frac{-1}{2-x}\left(\ln(2-x)\right)^{-\frac{1}{2}}}_{f'\,f^{\alpha}\ \text{alakú}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to-\infty} \left.\frac{\left(\ln(2-x)\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_{\omega}^{-1} =$$

$$= 2\lim_{\omega\to-\infty}\left(\sqrt{\ln 3} - \sqrt{\ln(2-\omega)}\,\right) = -\infty \quad \text{(divergens)}$$

11.1.2. Egy fontos megjegyzés

(D) Az $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrált konvergensnek mondjuk, ha tetszőleges $c \in (a,b)$ mellett

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{és} \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mindketten konvergens integrálok, és a fenti integrál divergens, ha az utóbbi két integrál közül akár csak az egyik divergens.

(D) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\omega_2\to\infty\\ \omega_1\to-\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x}$

(M) Az előző definíció miatt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ui. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x \neq \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}\right] = 0$, mert pl. $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,\mathrm{d}x$ divergenciája miatt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x$ is divergens.

11.1.3. Ha a függvény nem korlátos

D Ha a-ban nem korlátos, de $f \in R_{[a+\delta,b]}$ $(a < a+\delta < b)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{vagy} \qquad = \lim_{\alpha\to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D Ha b-ben nem korlátos, de $f \in R_{[a,b-\delta]}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{vagy} \qquad = \lim_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

D Ha $c \in (a,b)$-ben nem korlátos:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to+0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to+0} \int_{c+\delta_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pl. $\boxed{\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$X = \lim_{\delta\to+0} \int_0^{1-\delta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}_{f'\,f^\alpha \text{ alakú}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \left.\frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{1-\delta} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\delta\to+0} \left((\arcsin(1-\delta))^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Pl. $\boxed{\int_5^7 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$X = \lim_{\delta\to+0} \int_{5+\delta}^7 (x-5)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \left.\frac{(x-5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_{5+\delta}^7 = 3 \lim_{\delta\to+0} \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\delta}\right) = 3\,\sqrt[3]{2}$$

11.2. Fontos példák

Pl. $\boxed{\text{Milyen } \alpha\text{-ra konvergens } \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ ?}}$

Ha $\alpha = 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^{\omega} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \ln x \Big|_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} (\ln\omega - \ln 1) = \infty\,, \qquad \text{tehát divergens}$$

Ha $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^{\omega} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right]$$

Konvergens, ha $\quad 1-\alpha < 0\,,$ tehát $\quad \alpha > 1.$
Divergens, ha $\quad 1-\alpha > 0\,,$ tehát $\quad \alpha < 1.$

Összefoglalva:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Pl. $\boxed{\text{Milyen } \alpha\text{-ra konvergens } \int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ ?}}$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ui.: $\alpha = 1$:

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_\delta^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \ln x \Big|_\delta^{1} = \lim_{\delta\to+0} (\ln 1 - \ln\delta) = \infty\,, \qquad \text{divergens}$$

$\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_\delta^{1} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\delta^{1} = \lim_{\delta\to+0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]$$

Konvergens, ha $1-\alpha>0$, tehát $\alpha<1$.
Divergens, ha $1-\alpha<0$, tehát $\alpha>1$.

Pl. $\boxed{\text{Milyen } \alpha\text{-ra konvergens } \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ ?}}$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x}_{\text{konv., ha } \alpha<1} + \underbrace{\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x}_{\text{konv., ha } \alpha>1} \qquad \text{így divergens } \forall\,\alpha\text{-ra}$$

11.3. Az improprius integrálok néhány tulajdonsága

T1 Az $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ (ill. $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$) improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\,\Omega(\varepsilon)\in\mathbb{R}$ szám úgy, hogy $\forall\,\omega_1>\Omega,\ \omega_2>\Omega$ (ill. $\omega_1<\Omega,\ \omega_2<\Omega$) esetén:

$$\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \qquad\qquad \text{(Cauchy kritérium)}$$

B (¬B)

D Ha $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor f abszolút konvergens.

Ha $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, de $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ nem konvergens, akkor az improprius integrált feltételesen konvergensnek mondjuk.

T2 Ha $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens, és

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(B)

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \qquad\qquad \omega_1,\omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

Az első egyenlőtlenség a határozott integrálnál tanultak miatt, a második pedig az abszolút konvergencia és T_1 miatt áll fenn. Tehát $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

Másrészt:

$$-|f(x)| \;\le\; f(x) \;\le\; |f(x)| \qquad \text{miatt}$$

$$-\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \forall\,\omega\text{-ra} \qquad (\omega > 0)$$

Ekkor a limeszekre is igaz:

$$-\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

tehát

$$-\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \qquad \left|\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

■

11.3.1. Majoráns kritérium

(T3) $f \in R_{[a,\omega]}$ $\forall\,\omega \in (a,\infty)$-re és $|f(x)| \le g(x)$ $x \in [a,\infty)$-re.
Ha $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ is az (az előző tétel miatt $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens) és

$$\left(\left|\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le\right) \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

B g-re igaz a Cauchy kritérium:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

De $0 \le |f(x)| \le g(x)$ miatt:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

tehát $|f|$-re is teljesül a Cauchy kritérium.
Másrészt:

$$\int_{a}^{\omega} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\omega} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\forall\,\omega$-ra és ezért a limeszekre is teljesül. ■

11.3.2. Minoráns kritérium

T4 Ha $0 \le h(x) \le f(x)\ \ x \in [a,\infty)$-re és $\displaystyle\int_{a}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \infty \quad\Longrightarrow\quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$

B Ha $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens lenne, akkor az előző tétel miatt $\displaystyle\int_{a}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens lenne. $\lightning$ ■

M Hasonló tételek mondhatók ki a $(-\infty, b]$ ill. $[a, b]$ intervallumon definiált improprius integrálokra is.

11.4. Feladatok

1. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = ?$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = ?$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+4)}\,\mathrm{d}x = ?$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = ?$

7. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{8}{(x-2)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = ?$

8. $\displaystyle\int_3^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-3}} = ?$

9. $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad (t := \sqrt{x-3})$

10. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad (t := \mathrm{e}^x)$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad (t := \mathrm{e}^x)$

12. Konvergens-e az alábbi integrál?

    a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^4+2x^3+1}\,\mathrm{d}x$

    b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+2x^3+1}\,\mathrm{d}x$

13. Konvergens-e az

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 2x^2 + 2} \, \mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, adjunk becslést az integrál értékére!

12. Az integrálszámítás alkalmazása

12.1. Terület

$$\operatorname{mes} H = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot \dot{x}(t) \, \mathrm{d}t$$

$f(x) \geq 0,\ f \in C^0_{[a,b]};\quad y(t) \geq 0,\ y \in C^0_{[\alpha,\beta]};\quad x \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ szig. mon. (vagy $[\beta, \alpha]$)

12.2. Szektorterület

$$t_{sz} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \qquad\qquad r \in C^0_{[\alpha,\beta]}$$

12.3. Forgástest térfogata

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t) \dot{x}(t) \, \mathrm{d}t$$

Feltételek a területnél.

12.4. Ívhosszúság

($\exists$ ívhossz $\equiv$ rektifikálható a görbeszakasz)
$s = \sup \{$húrpoligonok hossza$\}$ ($s = \infty$, ha a halmaz nem korlátos)

M

1. A folytonosság nem elégséges feltétele a rektifikálhatóságnak.
   Pl. $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad x \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$-re $s = \infty$, pedig folyt.

2. A folytonos differenciálhatóság már elégséges feltétel.

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$f \in C^1_{[a,b]}$, $x \in C^1_{[t_1,t_2]}$ szig. mon., $y \in C^1_{[t_1,t_2]}$