VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (2)

Feladatgyűjtemény

(Korábbi zárthelyi és vizsgafeladatok)

Oktatási segédanyag

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2000. február

Szerkesztette: Győri Sándor

I. rész
Feladatok

1. Differenciálegyenletek

1.1.

1.1.1.

$y' = y^3 \cdot \sin 3x; \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \qquad y(x) = ?$

1.1.2.

$y' = (1 - y)\,\cos 2x \qquad y(x) = ?$

1.1.3.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}\ \operatorname{sh} x$$

1.1.4.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{3y - 2}{2x + 1}\,, \quad x > 0$$

1.1.5.

Adja meg az $\quad y' = \dfrac{(y+1)^4}{x^2} \quad$ differenciálegyenlet összes megoldását!

1.1.6.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y+2)^2}{1+x^2}; \qquad y(1) = -1$$

1.1.7.

Írja fel az

$$e^y\, y' = e^y - e$$

differenciálegyenlet $y(0) = 1$, illetve $y(0) = 2$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldásait!

1.1.8.

Oldja meg az

$$y' = \frac{3y^2+4}{y\,(2x+5)}\,, \qquad\qquad x, y > 0$$

differenciálegyenletet!

1.1.9.

$$y' = \frac{y^2-2y+3}{(y-1)\,(x+1)^3} \qquad\qquad y(x) = ?$$

1.1.10.

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{y^2-6y+8}{(2y-6)(x+5)}$$

a) Határozza meg az $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ ponton áthaladó megoldását!
b) Határozza meg az $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldását!

1.2.

1.2.1.

a) Milyen típusú differenciálegyenlet az

$$y' - \frac{y}{x} = 2\sin x\,, \qquad x > 0,$$

Milyen alakú az általános megoldása?

b) Mutassa meg, hogy

$$y_p = 2x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

megoldása ennek a differenciálegyenletnek!

c) Írja fel az általános megoldást! (y_p nem hozható egyszerűbb alakra!)

1.2.2.

a) $y' - \dfrac{2y}{x} = 0 \qquad\qquad y(x) = ?$

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 \qquad\qquad y(x) = ?$

1.2.3.

Oldja meg az $\quad y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \quad$ differenciálegyenletet!

1.2.4.

$y' = 4xy + 2x \qquad\qquad y(x) = ?$

1.2.5.

Írja fel az

$$y' + \frac{3}{x}\,y = 5x - 4$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

1.2.6.

$y' - 2xy = x^3 \mathrm{e}^{x^2} \qquad\qquad y(x) = ?$

1.2.7.

$y' - \dfrac{4}{x} y = x^4 \mathrm{e}^{-2x} \qquad\qquad y(x) = ?$

1.2.8.

Határozza meg az

$$y' \;-\; \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}\, y \;=\; \frac{5 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

1.2.9.

a) $y' - \dfrac{3}{x} y = -3x^4 \qquad y(x) = ?$

b) $y' + \dfrac{y}{x} = x^4 y^4 \qquad y(x) = ? \qquad \left(u = \dfrac{1}{y^3}\right.$ helyettesítéssel oldja meg!)

1.3.

1.3.1.

$u = \dfrac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az

$$x^2 y' + xy = x^2 + y^2$$

differenciálegyenletet! ($x > 0$ feltételezéssel dolgozhat)

1.3.2.

$y' = (2x + y)^2 - 2\,, \qquad y(1) = -3\,, \qquad\qquad y(x) = ?$

($u = 2x + y$ új változó bevezetésével oldja meg!)

1.3.3.

Vezesse be az $u = y - 3x$ új változót, majd keresse meg az

$$y' = (y-3x)^2\,, \qquad y\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

kezdeti érték probléma egy megoldását!

1.3.4.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet az $u = y^3$ helyettesítéssel!

$$3y' - 2y = \frac{2 + \mathrm{e}^{3x}}{y^2}$$

1.3.5.

Hajtsa végre az $u = xy^3$ helyettesítést a

$$3xy^2y' - y^3 = x^3$$

differenciálegyenletnél! A kapott egyenletet nem kell megoldania!

1.3.6.

Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát az $y' = p(y)$ helyettesítéssel!

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} \quad ; \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2$$

1.4.

1.4.1.

Tekintsük az $y' = x^2 + y^3$ differenciálegyenletet!

a) Indokolja meg, hogy az $x_0 = 1$ pontnak van olyan környezete, melyben az $y(1) = -1$ kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható!
Jelöljük ezt a megoldást $y = \varphi(x)$-szel!

b) A differenciálegyenlet megoldása nélkül határozza meg φ-nek az $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor polinomját!

c) Milyen lokális tulajdonsága van φ-nek az $x_0 = 1$ pontban?

1.4.2.

$$y' = \frac{y - x + 1}{y - x}\,, \qquad y \neq x$$

a) Indokolja meg, hogy a fenti differenciálegyenletnek pontosan egy megoldása halad át az $x_0 = 2$, $y_0 = 5$ ponton!
b) Milyen irányú az iránymező ebben a pontban? Mely pontokban lesz ugyanilyen irányú az iránymező?
c) Írja fel az a)-beli megoldásgörbe $x_0 = 2$ pontbeli másodfokú Taylor polinomját!

1.4.3.

Tekitsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = y^3 - e^{3x}$$

a) Igaz-e, hogy ennek a differenciálegyenletnek minden ponton át halad megoldásgörbéje?
b) Milyen szög alatt metszi az y tengelyt az $x_0 = 0$, $y_0 = \sqrt[3]{2}$ ponton áthaladó megoldásgörbe?
c) Mely pontokon áthaladó megoldásgörbéknek van lokális maximuma illetve minimuma éppen a szóbanforgó pontban?

1.4.4.

$$y' = x^2 + y^2 - 2xy$$

a) Rajzolja fel az $(1, 2)$ ponton áthaladó izoklínát! (Rajzoljon be néhány vonalelemet is!)
b) A differenciálegyenlet megoldása nélkül vizsgálja meg, hogy hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásgörbéknek! Ahol van, ott milyen jellegű a lokális szélsőérték?

1.5.

1.5.1.

a) $y'' - 2y' - 3y = 0$
Adja meg az általános megoldást!
Adja meg az $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$ feltételeket kielégítő megoldást!
b) $y'' - 2y' - 3y = 3x \qquad y(x) = ?$
c) $y'' - 2y' - 3y = -2\sin x - 6\cos x \qquad y(x) = ?$

1.5.2.

$y'' + 2y' - 3y = e^{5x} \qquad y(x) = ?$

1.5.3.

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 6y' + 9y = 27x^2$$

1.5.4.

$y'' + y' - 2y = 6e^x + 2x \qquad y(x) = ?$

1.5.5.

$y'' + 8y' = 34 \cdot \sin 2x \qquad\qquad y(x) = ?$

1.5.6.

Határozza meg a

$$y'' + 10y' + 29y = -40\mathrm{e}^{29x}$$

általános megoldását!

1.5.7.

Adja meg α értékét úgy, hogy az

$$y'' - \alpha y = \mathrm{e}^{5x}, \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenciálegyenletnél külső rezonancia lépjen fel!

Ezen α érték esetén válaszoljon az alábbi kérdésekre:

a) Milyen szerkezetű az általános megoldás?
b) Milyen alakban kereshető egyik megoldása?
c) Határozza meg az általános megoldást! (A fenti α érték esetén.)

1.5.8.

A β paraméter függvényében keresse meg az alábbi differenciálegyenlet megoldását!

$$y'' + 2\beta\, y' + y = 0$$

1.5.9.

a) Írja fel a

$$y'' + y = \cos x$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

b) Az α paraméter mely értéke mellett lesz periodikus (azaz "tiszta" szinuszos vagy koszinuszos tagokat tartalamazó) az

$$y'' + \alpha\, y = \cos x$$

differenciálegyenlet minden megoldása;

1.5.10.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''' + 9y' = 3x^2$$

1.5.11.

$y''' + 4y' = 24x^2 \qquad\qquad y(x) = ?$

1.6.

1.6.1.

Mutassa meg, hogy az

$$\big(3(x-1)^2y^2+2\mathrm{e}^{2x}\big)\,\mathrm{d}x+\big(2(x-1)^3y+2\cos 2y\big)\,\mathrm{d}y=0$$

differenciálegyenlet egzakt, és oldja meg!

1.6.2.

Mutassa meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet egzakt, és oldja meg a differenciálegyenletet!

$$\left(\mathrm{e}^{3y^2}+2x+2+2xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(6xy\mathrm{e}^{3y^2}+9y^2+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0 \qquad y(1)=0$$

1.6.3.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$(x^3+3xy^3-1)\,\mathrm{d}x+(3x^2y^2+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=0$

1.6.4.

Mutassa meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet egzakt, és határozza meg az $y(2)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását:

$$(1+\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{d}x+\left(x^2\mathrm{e}^{xy}+\frac{2y}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y=0$$

1.6.5.

Mutassa meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet egzakt és adja meg az általános megoldását!

$$\left(2y\,\mathrm{e}^{y^2+2x}+6x\right)\,\mathrm{d}x+\left((1+2y^2)\,\mathrm{e}^{y^2+2x}+3\right)\,\mathrm{d}y=0$$

1.6.6.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$(2x\mathrm{e}^{2y}+6x+y\cdot\cos xy)\,\mathrm{d}x+(2x^2\mathrm{e}^{2y}-6+x\cdot\cos xy)\,\mathrm{d}y=0 \qquad y(1)=0\,,$

1.6.7.

Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát:

$$(2\mathrm{e}^{2x+y}+x)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{2x+y}+3y^2)\,\mathrm{d}y=0\,, \qquad x_0=0,\ y_0=1$$

1.6.8.

Mutassa meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet egzakt, és határozza meg az $y(2)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását:

$$\big(4x^3y^3+3x^2y^2+2x\big)\,\mathrm{d}x+\big(3x^4y^2+2x^3y-4y^3\big)\,\mathrm{d}y=0$$

1.6.9.

Keressen $t = \dfrac{x}{y}$ – tól függő multiplikátort az

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x + yx\,\mathrm{d}y = 0$$

differenciálegyenlethez! (A differenciálegyenletet nem kell megoldania!)

1.6.10.

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

a) Milyen feltételnek kell a g és h függvényeknek megfelelniük, hogy a nem egzakt differenciálegyenlet $\mu(x - y^2)$ multiplikátorral szorozva egzakt legyen?
b) Alkalmazza eredményét az alábbi differenciálegyenletre, és határozza meg a multiplikátort:

$$\left(6x + 6y - 2y^2\right)\mathrm{d}x - \left(8xy + 15y^2 - 3x\right)\mathrm{d}y = 0$$

(Ne oldja meg az egzakt differenciálegyenletet!)

1.7.

1.7.1.

Keresse meg a következő differenciálegyenlet-rendszerek megoldását!

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

1.7.2.

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyik megoldását!

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x}$$

1.7.3.

Az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyik megoldása $\underline{x}_1 = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Keressük meg az $\underline{x}_1$-től lineárisan független megoldásokat!

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\underline{x}$$

1.7.4.

Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer megoldáshalmazának egy kétdimenziós alterét!

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underline{x}$$

1.7.5.

Írjuk fel az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását két lineárisan független megoldásvektor lineáris kombinációjaként!

a) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}\underline{x}$

b) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & -16\\ 1 & 2\end{pmatrix}\underline{x}$

c) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\underline{x}$

1.7.6.

Írjuk fel az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását!

a) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 16 & 1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ 0\end{pmatrix}$

b) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 16 & 1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$

c) $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1 & -9\\ 1 & 1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$

d) $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$

e) $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Függvénysorozatok, függvénysorok

2.1.

2.1.1.

Legyen

$$f_n(x) = \frac{1}{2x^2 + n + 5} + 3x$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?\,, \qquad D_f = ?$

2.1.2.

Legyen

$$f_n(x) = \frac{x^2 - xn^3}{x^4 + n + 3}$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?\,, \qquad D_f = ?$

2.1.3.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{xn^3 + n^2 + 1}{xn^3 + (x+2)n^2 + 1} = ?\,, \qquad$ ha $x \geq 0$

2.1.4.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^2n^4 + n^2 + 3}{2xn^4 + (x+5)n^2 + 2} = ?\,, \qquad$ ha $x \in [0, \infty)\,.$

Egyenletes-e a konvergencia?

2.1.5.

Egyenletesen konvergens-e az

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

függvénysorozat a $(-\infty, \infty)$ intervallumon? $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

2.1.6.

$$f_n(x) = \frac{n + \sin nx}{n}$$

a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b) $||f_n - f|| = ?$

2.1.7.

Legyen

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^4}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$

b) $||f_n - f|| = ?$

2.1.8.

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + 4x^2}$$

a) $f(x) = ?\,, \qquad D_f = ?$

b) Határozza meg az $||f - f_n||$ normát a konvergencia tartományban!
Egyenletes-e a konvergencia?

2.1.9.

Legyen

$$f_n(x) = \frac{-x^2 + (n+4)x}{n}\,, \qquad 0 \le x \le 3$$

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b) $||f_n - f|| = ?$

c) Egyenletes-e a konvergencia?

2.1.10.

$$f_n(x) = \frac{1}{x + \sqrt[n]{n}}, \qquad x \ge 0$$

a) $f(x) = ?$

b) $||f_n - f|| = ?$

c) Egyenletes-e a konvergencia a $[0, \infty)$-on?

2.1.11.

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^2x^2}$$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$
Határozza meg az $||f_n - f||$ értékét a konvergencia tartományban!
Egyenletesen konvergens-e itt a függvénysorozat?

2.1.12.

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} + 2x^2 \qquad\qquad x \in [0,\infty)$$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$
Egyenletes-e a konvergencia a $[0,1]$, illetve az $[1,2]$ intervallumon?

2.1.13.

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{2x} + \frac{\sin^2(n^3x^2)}{\sqrt{2n^2+3}}$$

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = ?$

2.2.

2.2.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\,\mathrm{e}^{xn}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és összegfüggvényét!

2.2.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2\,(\ln x)^n$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és összegfüggvényét!

2.2.3.
Egyenletesen konvergens-e a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2+\sqrt{k}+x^2}$ függvénysor?

2.2.4.

Egyenletesen konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x\sqrt{k}+1\right)}{5x^2+3^k}$$

2.2.5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(n^3x^2+1\right)}{2^n+3x^2}$$

Milyen x-re folytonos a sor összegfüggvénye?

2.2.6.

Felcserélhető-e a $\sum\limits^{\infty}$ és az integrál jel az alábbi kifejezésben?

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \sin kx}{3^k} \right) \mathrm{d}x$$

2.2.7.

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos az alábbi sor összegfüggvénye?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n+2^n}$$

Milyen intervallumon lehet tagonként integrálni?

2.2.8.

a) Milyen x-re konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x+1}{n^2}}{n^2+3n+8}$$

függvénysor?

b) Mutassa meg, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható a sor összegfüggvénye!

2.2.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\sqrt{n}x+1\right)}{n^2\sqrt{n}+n+9}$$

a) Milyen x-re konvergens a függvénysor?
b) Mutassa meg, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható a sor összegfüggvénye!

2.2.10.
Igaz-e az alábbi állítás minden valós x-re?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos\left(n^3+\sqrt{n}\,x\right)}{4\sqrt{n^5}+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1+\cos\left(n^3+\sqrt{n}\,x\right)}{4\sqrt{n^5}+3}$$

2.3.

2.3.1.
Adja meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}\, x^k$$

sor konvergencia sugarát!

2.3.2.
Határozza meg az alábbi hatványsor konvergencia sugarát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!}\, x^n$$

2.3.3.
Keresse meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}\,(x+1)^n$ sor konvergencia tartományát!

2.3.4.
Adja meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{n^2}\, x^n$$

2.3.5.
Milyen x-re konvergens a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}\,(x-4)^n$ sor?

2.3.6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)\,x^k}{4^{k-1}}$$

a) Adja meg a sor konvergenciatartományát!
b) Adjon meg egy olyan intervallumot, ahol a sor egyenletesen konvergens!
c) Adja meg a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)\,(x+1)^{2k}}{4^{k-1}}$ sor konvergenciatartományát!

2.3.7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}\, x^n$$

a) Adja meg a sor konvergencia tartományát!
Adjon meg egy olyan $[\alpha, \beta]$ intervallumot, ahol alkalmazható a tagonkénti integrálásról szóló tétel! Ezt a tételt is írja le!
b) Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}(x+3)^n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} x^{3n}$ sor?

2.3.8.

a) Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, k\, x^k$$

hatványsor konvergenciasugarát és az összegfüggvényét!
Jelöljük $T(x)$-szel az összegfüggvényt!

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k \cdot 2^k}{3^{k+1}} = ?$

c) $T^{(10)}(x)\big|_{x=0} = ?$

2.4.

2.4.1.

Definiálja az x_0 bázispontú Taylor sort!
Írja fel a Lagrange-féle hibatagot! Mi a kapcsolata az f függvénnyel és a Taylor sorral? Adjon elégséges feltételt az $f(x) = T(x)$ egyenlőségre!

2.4.2.

a) Hogyan definiáljuk egy f függvény x_0 körüli Taylor sorát?
b) Milyen alakú lehet a konvergencia tartománya?
c) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy f megegyezzék Taylor sorával?

d) Határozza meg az $f(x) = \sin x$ Taylor sorát $x_0 = 0$ esetén, és igazolja, hogy $f(x)$ megegyezik a Taylor sorával!

2.4.3.
A Taylor sor definíciójával határozza meg az
$$f(x) = \operatorname{sh} x$$
függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

2.4.4.
Írja fel az $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ függvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = 1$ bázispontú Taylor sorát!

2.4.5.
Határozza meg

$$f(x) = \frac{1}{1 + 8x^3}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

2.4.6.
Írja fel az $f(x) = \dfrac{2}{8 - x}$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

2.4.7.
Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{1 + 9x^2} \qquad\qquad g(x) = \operatorname{ch} 2x$$

2.4.8.
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és határozza meg annak konvergencia tartományát!
a) $f(x) = \mathrm{e}^{2-x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

2.4.9.
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia tartományát:

$$f(x) = \frac{1}{4 - x} \qquad\qquad g(x) = \mathrm{e}^{x-1}$$

2.4.10.

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 2$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{5-x} \qquad\qquad g(x) = \sin(x-2)$$

2.4.11.

Fejtse Taylor sorba az alábbi függvényeket, és adja meg a sorok konvergenciatartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}\,, \qquad x_0 = 3$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{3x}\,, \qquad x_0 = -1$

2.4.12.

A tanult módszerrel írja fel az

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát! Ennek felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg} 5x^2$$

függvény Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

2.4.13.

a) Határozza meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait, azok konvergencia sugarait:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \begin{array}{ll} g_1(x) = \operatorname{arctg} x \quad , & h_1(x) = \operatorname{arctg} x - x \\ g_2(x) = \operatorname{arctg}(3x) & h_2(x) = \operatorname{arctg}(3x) - 3x \end{array}$$

b) Az a) alapján határozza meg a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{\operatorname{arctg}(3x) - 3x}$$

határértéket.

2.4.14.

a) Írja fel az $f(x) = \operatorname{ch} 2x$ és a $g(x) = \cos 2x \quad x_0 = 0$ körüli Taylor sorait!

b) Adja meg $A \neq 0$, $\alpha \neq 0$ értékét úgy, hogy

$$\operatorname{ch}\frac{2}{\sqrt{n}} - \cos\frac{2}{\sqrt{n}} \sim A n^{\alpha}.$$

c) Bizonyítsa be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\frac{2}{\sqrt{n}} - \cos\frac{2}{\sqrt{n}} \right) \frac{\cos nx}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

egyenletesen konvergens!

2.5.

2.5.1.

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+2x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és határozza meg konvergencia sugarát!
Írja fel x^4 együtthatóját!

2.5.2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{1+4x^3}}$$

Adja meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának konvergenciasugarát valamint 9-edfokú Taylor polinomját!

2.5.3.

Írja fel az alábbi f, g és g' függvények $x_0 = 0$ körüli ötödik Taylor polinomjait és a megfelelő Taylor sorok konvergencia sugarait:

$f(x) = \sqrt[7]{1+x}, \qquad g(x) = \sqrt[7]{1+2x^2}, \qquad g'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[7]{1+2x^2}.$

2.5.4.

$$f(x) = \sqrt[9]{1+3x^2}$$

Adja meg az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!
$f^{IV}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

2.5.5.

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait (annak első négy nem nulla tagját) valamint az egyes Taylor sorok konvergenciasugarát!

$$f(x) = \sqrt[7]{(1+x)^2}, \qquad\qquad g(x) = \sqrt[7]{(1+3x^2)^2}$$

(A Taylor sor együtthatóit szorzatalakban is megadhatja.)

2.5.6.

Adja meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+24x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jelölés mellett $a_6 = ?$

2.5.7.

$$f(x) = \sqrt[4]{16 + 3x^4} \qquad f^{(11)}(0) = ?\,, \qquad f^{(12)}(0) = ?\,, \qquad R = ?$$

(A deriváltakat szorzatalakban adja meg!)

3. Többváltozós függvények

3.1.

3.1.1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{4x+15y} = ?$$

3.1.2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^4}{2x^2+3y^2} = ?$$

3.1.3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x^2}{2x^2+3y^2} = ?$$

3.1.4.

Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+2y^2}\,, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

a) Keresse meg az $y = mx$ egyenesek mentén a függvény határértékét az origóban!
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

3.1.5.

$$f(x,y) = \frac{2x^2-3y^2}{x^2+5y^2} \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

3.2.

3.2.1.

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x+\dfrac{x\cdot\sin y}{x^2+y^2}, & \text{ha}(x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Határozza meg f határértékét az origóban az $y = mx$ egyenesek mentén!
Folytonos-e f az origóban?

b) Adja meg f'_x-et, ahol az létezik!

3.2.2.

Írja fel az

$$f(x,y)=\frac{(x^2+1)\,y}{\mathrm{e}^{2y}}$$

függvény összes másodrendű parciális deriváltját!

3.2.3.

Forgassa meg az (x,z) sík $z = \operatorname{ch} x$ görbéjét a z tengely körül. Adja meg a kapott forgásfelületet egy kétváltozós függvény grafikonjaként! Mennyi ennek a függvénynek az x szerinti parciális deriváltja az $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ pontban?

3.2.4.

a) Mikor mondjuk, hogy f totálisan differenciálható az (x_0, y_0)-ban?

b) Milyen elégséges feltétel adható f totális differenciálhatóságára?

c) Milyen kapcsolat van f totális differenciálhatósága és folytonossága között? (Állítását bizonyítsa be, ill. adjon ellenpéldát!)

3.2.5.

Legyen $$f(x,y)=\frac{x+2y}{x-2y};\qquad f(0,0)=0.$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) Totálisan differenciálható-e f az origóban?

3.2.6.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+4y^2}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{7}{3}\quad, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Folytonos-e a függvény az origóban?
b) $\operatorname{grad} f|_{(1,0)} = ?$

3.3.

3.3.1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y+1)x^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 1 \quad, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e a függvény az origóban? Totálisan deriválható-e a függvény az origóban?
b) Adja meg $f'_x(x,y)$-t, ahol létezik!
c) Adja meg az iránymenti derivált definícióját! Adjon elégséges feltételt a kiszámítására!

3.3.2.

Határozza meg az

$$f(x,y) = \frac{(y^2+1)(x+1)}{\mathrm{e}^{2x}}$$

függvény érintősíkjának az egyenletét az
$x_0 = 0,\ y_0 = 1$-hez tartozó pontban!

3.3.3.

Legyen

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{x+3y}}{x}$$

a) Határozza meg az f függvény gradiensét az $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ koordinátájú pontban!
b) Írja fel az f függvény P pontbeli érintősíkjának az egyenletét!

3.3.4.

$$f(x,y) = xy^2 - \frac{y}{(x+1)^2}$$

a) $\operatorname{grad} f|_{(1,2)} = ?$
b) Írja fel az $(1,2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

3.3.5.

$$f(x,y)=xy^2-\frac{y}{(x+1)^2}$$

Írja fel az $(1,2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

3.3.6.

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

a) Írja fel a $P_0(1,1)$ pontbeli érintősík egyenletét!
b) Határozza meg az $x>0$ félsík azon pontjait, amelyekben $f''_{xx}+f''_{yy}=0$.

3.3.7.

$$f(x,y)=xy^2-\frac{y}{(x+1)^2}$$

a) $\operatorname{grad} f|_{(1,2)}=?$
b) Írja fel az $(1,2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

3.3.8.

$$f(x,y)=xy^2\mathrm{e}^{2x}$$

$f'_x=?\qquad f'_y=?$
Írja fel a $P_0(1,-1)$ pontbeli érintősík egyenletét!

3.3.9.
Legyen

$$f(x,y,z)=x^2yz+xy^2z^2+x^3z^3$$

a) Írja fel az f függvény $P_0(1,2,-1)$ pontbeli gradiensét!
b) Határozza meg az f függvény $P_0(1,2,-1)$ pontbeli $\underline{v}=2\,\underline{i}-3\,\underline{j}+5\,\underline{k}$ irányú iránymenti deriváltját!

3.3.10.

$$f(x,y,z)=(2x+1)\,\mathrm{e}^{3z}+\ln 2y\qquad\qquad P_0=(1,1,0)$$

a) $\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = ?$

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ $\qquad \underline{e} \parallel (3\underline{i} - 4\underline{k})$

3.3.11.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e a függvény az origóban?

b) Az iránymenti derivált definíciójával vizsgálja meg, hogy létezik-e az iránymenti derivált az origóban, ha $\underline{e} \parallel 3\underline{i} - 4\underline{j}$!

3.3.12.

Legyen

$$f(x,y) = xy + y^2 + 3x^2 - 6x + 7y, \qquad P_0(0,0), \qquad \underline{e} \parallel 2\underline{i} - \underline{j}$$

a) Indokolja meg, hogy f totálisan differenciálható! $\qquad \left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

b) Írja le a kétváltozós függvény iránymenti deriváltjának definícióját, és számolja ki ennek alapján is a $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét!

3.3.13.

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2y-1}}{x^2 + 1}$$

a) Hol létezik $\operatorname{grad} f$? Ahol létezik, írja fel!

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ $\qquad P_0\left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad \underline{e} \parallel 3\underline{i} - 4\underline{j}$

3.3.14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Írja fel f'_x-et, ahol az létezik!

c) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)}$, $\quad$ ha $\underline{e} \parallel \underline{i} - \underline{j}$ $\qquad$ (A definícióval dolgozzon!)

3.3.15.

$$f(x,y)=\frac{5x-3y}{2x+4y} \qquad (x_0,y_0)=(0,1)$$

a) $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=?\,,\qquad \mathrm{d}f\,((x_0,y_0),(h,k))=?$
b) Milyen irányban lesz az (x_0,y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

3.3.16.

$$f(x,y)=x^{2y}$$

Adja meg a $P_0(2,1)$ pontban a maximális iránymenti derivált irányát és értéket!

3.3.17.

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^4}$$

a) $f'_x(0,0)=?;\quad f'_y(0,0)=?\quad$ (A definícióval dolgozzon!)
b) $\operatorname{grad} f|_{(1,2)}=?$
c) Adja meg $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,2)}$ értékét és irányát!

3.4.

3.4.1.

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{y^2}\cos\pi x \qquad P_0=(x_0,y_0)=(-1,1)$$

a) $\mathrm{d}f\,((x_0,y_0),(h,k))=?\qquad \mathrm{d}^2f\,((x_0,y_0),(h,k))=?$
b) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

3.4.2.

$$f(x,y)=h(xy+x^2) \qquad h\in C^2_{\mathbb{R}}$$

$f'_x=?;\quad f''_{xy}=?$

3.4.3.

$$h(x,y)=f(xy^2),\qquad f\in C^2_{\mathbb{R}}$$

$h'_x=?\qquad h''_{xy}=?$

3.5.

3.5.1.

Van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + 3xy^2 + y^3$$

függvénynek az $x = 0,\ \ y = \frac{1}{2}$ pontban?

3.5.2.

Legyen

$$f(x,y) = xy + x^2 - x + y - 2$$

Van-e az f-nek lokális szélsőértéke?

3.5.3.

$$f(x,y) = (x+5)(y+x-1)$$

a) Hol teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele?
b) Van-e f-nek lokális szélsőértéke?

3.5.4.

$$f(x,y) = y^5 - 80y + 12x^3 - x$$

Hol van lokális szélsőértéke a függvénynek?

3.5.5.

Határozza meg az

$$f(x,y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

függvény lokális maximum ill. minimum helyeit, amennyiben vannak egyáltalán!

3.5.6.

$$f(x,y) = x^3 - 12x + 3 + 2y^2 - y$$

Keresse meg a lokális szélsőérték helyeket!

3.5.7.
Legyen

$$f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

3.5.8.

a) Fogalmazza meg a kétváltozós függvényekre vonatkozó Weierstrass tételeket!
b) Legyen $f(x,y) = (3y+6x-4)^2 + 9(x+y)^2$, és T az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y + x \leq \frac{1}{3}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány! Indokolja meg, hogy f-nek a T tartományon létezik az abszolút maximuma és minimuma, és határozza meg azokat!

3.5.9.

$$f(x,y) = x^2 - 6x + 1 + \frac{y^3}{3} - 3y$$

a) Határozza meg a függvény lokális szélsőértékeit!
b) Létezik-e $\min\limits_{(x,y)\in T} \{f(x,y)\}$ ill. $\max\limits_{(x,y)\in T} \{f(x,y)\}$, ha $T:\ y \leq x,\ y \geq 0,\ x \leq 5$?
Ha igen, határozza meg!

3.5.10.
Legyen

$$f(x,y) = (y+2x-4)^2 + (y+x)^2$$

és tekintsük a $0 \leq x$, $0 \leq y$ és az $y + x \leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott T tartományt! Van-e az f függvénynek a T tartományon abszolút maximuma illetve minimuma? Ha igen, akkor határozza meg!

3.6.

3.6.1.

$$\iint\limits_T (2x-y)\,\mathrm{d}T = ?,$$

ha T az $A(0,0)$, $B(5,0)$ és a $C(4,2)$ pontok által meghatározott háromszög?

3.6.2.

a) Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

b) $\iint\limits_T (x^2+y^2-1)^2\,\mathrm{d}T = ?\,,\qquad$ ha $T:\ x^2+y^2 \le 4,\quad y \ge 0$

3.6.3.

a) Adja meg a Descartes-féle koordinátáknak a polárkoordinátáktól való függését! Vezesse le a Jacobi determináns értékét! (Mit értünk Jacobi determinánson?)
Hogyan kell végrehajtani a polárkoordinátás helyettesítést a

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

integrálon?

b)

$$\iint\limits_T \frac{1}{(x^2+y^2)(\ln\sqrt{x^2+y^2})^2}\,\mathrm{d}T = ? \qquad T:\ x^2+y^2 \ge \mathrm{e}^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

3.6.4.

$$\iint\limits_T y\,\mathrm{d}T = ?,\qquad \text{ha}\quad T:\ x^2-4x+y^2 \le 0;\ \ y \ge x$$

3.6.5.

$$\iint\limits_T \frac{1}{(x^2\ +\ y^2)\ln^3(\sqrt{x^2+y^2})}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$$

$$T:\ x^2+y^2 \le \frac{1}{e^2}\,,\quad x\ge 0\,,\quad y \ge 0$$

3.6.6.

$$\iint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

$$T:\ x^2+y^2-4x \le 0\,,\quad y\ge 0$$

3.6.7.

a) $\iint\limits_T (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$ $\qquad T : \left\{ \begin{array}{c} |x|+|y| \le 1 \\ x \ge 0 \end{array} \right\}$

b) Végezze el az $x+2y=u,\quad x=v$ helyettesítést a fenti integrálban!

3.7.

3.7.1.

Mit nevezünk hengerkoordinátáknak? Határozza meg a hengerkoordinátákra való áttéres Jacobi determinánsát! (Mit nevezünk Jacobi determinánsnak?)

3.7.2.

a) Írja fel az $f(x,y)$ függvény alsó integrálközelítő összegét! Adja meg a jelölések tartalmát!

b) Adja meg a hengerkoordináták jelentését, és ismertesse a hengerkoordinátás transzformációt! Vezesse le a Jacobi determináns értékét!

c) $\iiint\limits_V z^2\,\mathrm{d}V = ?$ $\qquad V: \begin{array}{l} 0 \le z \le 16 - x^2 - y^2 \\ x^2+y^2 \le 4;\ y \ge 0 \end{array}$

3.7.3.

a) Határozza meg a polártranszformáció Jacobi determinánsát!

b) $\iiint\limits_V x^2+y^2\,\mathrm{d}V = ?,$

ha V a $z=x^2+y^2-4$ és a $z=5-3(x^2+y^2)$ felületek által határolt korlátos térrész.

3.7.4.

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ?$$

$$V: \qquad 1 \le x^2+y^2 \le 4 \quad , \qquad 0 \le z \le 9-x^2-y^2$$

3.7.5.

Számítsa ki az

$$z = 12-(x^2+y^2) \quad \text{és a} \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

3.7.6.

$$\iiint\limits_V x^2+y^2\,\mathrm{d}V = ? \qquad V:\ \text{tetszőleges 2 magasságú, } z \text{ tenghelyű henger}$$

3.7.7.

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V = ? \qquad V:\quad 0 \le z \le 4-x^2-y^2\,, \qquad x^2+y^2 \le 1$$

3.7.8.

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{d}V = ? \qquad V:\quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\,, \qquad y \ge 0$$

3.7.9.

a) Mit nevezünk gömbi koordinátáknak? (Mi az egyes koordináták jelentése?)

b) Határozza meg a gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi determinánsát!

c)

$$\iiint\limits_{R^3} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ? \qquad \text{(gömbi koordinátákkal)}$$

II. rész
Megoldás

1. Differenciálegyenletek

1.1.

1.1.1.

$$y = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\cos 3x + 1}}$$

1.1.3.

$$y = \operatorname{arsh}\left(C\mathrm{e}^{\operatorname{ch} x}\right); \qquad C \in \mathrm{R}$$

1.1.4.

$$y = \frac{1}{3}\left(2 + C\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right), \qquad C \in \mathrm{R}$$

1.1.5.

$$-\frac{1}{3(y+1)^3} = -\frac{1}{x} + C, \quad \text{illetve} \quad y \equiv -1 \qquad (x > 0 \quad \text{vagy} \quad x < 0)$$

1.1.6.

$$y = -2 + \frac{1}{-\operatorname{arctg} x + C}, \quad \text{illetve} \quad y \equiv -2$$

$$y(1) = -1: \qquad y = -2 + \frac{1}{-\operatorname{arctg} x - 1 - \frac{\pi}{4}}$$

1.1.7.

$$y = \ln\left(C\mathrm{e}^x + \mathrm{e}\right), \quad \text{illetve} \quad y \equiv 1$$

$$y(0) = 1: \quad y \equiv 1; \qquad y(0) = 2: \quad y = \ln\left((\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})\mathrm{e}^x + \mathrm{e}\right)$$

1.1.9.

$$y^2 - 2y + 3 = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{(x+1)^2}} \qquad K > 0 \quad \text{és} \quad y \neq 1,\ x \neq -1$$

Részletezve:

$$y = 1 + \sqrt{K\mathrm{e}^{-\frac{1}{(x+1)^2}} - 2}, \quad y > 1 \ \text{és} \quad (x > -1 \text{ vagy } x < -1)$$

$$y = 1 - \sqrt{K\mathrm{e}^{-\frac{1}{(x+1)^2}} - 2}, \quad y < 1 \ \text{és} \quad (x > -1 \text{ vagy } x < -1)$$

1.1.10.

$$y^2 - 6y + 8 = C(x+5) \quad \text{és} \quad y \neq 3,\ x \neq -5$$

Részletezve:

$y = 3 + \sqrt{1 + C(x+5)}\ , \quad y > 3$ és $\quad (x > -5$ vagy $x < -5)$

$y = 3 - \sqrt{1 + C(x+5)}\ , \quad y < 3$ és $\quad (x > -5$ vagy $x < -5)$,

illetve $\quad y \equiv 2$, de $x > -5$ vagy $x < -5$

illetve $\quad y \equiv 4$, de $x > -5$ vagy $x < -5$

a) $y \equiv 2\ , x > -5$

b) $y = 3 - \sqrt{1 + \frac{3}{5}(x+5)}\ , \quad x > -5$

1.2.

1.2.2.

a) $y = Cx^2 \qquad C \in \mathbb{R}\,, \quad x \neq 0$

b) $y = Cx^2 + \dfrac{x^4}{2} \qquad C \in \mathbb{R}\,, \quad x \neq 0$

1.2.3.

$y = Cx + x \ln \sqrt{1 + x^2}$

1.2.4.

$y = -\dfrac{1}{2} + C\mathrm{e}^{2x^2} \qquad C \in \mathbb{R}$

1.2.5.

$y = \dfrac{C}{x^3} + x^2 - x\ , \quad x \neq 0$

1.2.6.

$y = C\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{x^4}{4}\,\mathrm{e}^{x^2}$

1.2.7.

$y = Cx^4 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\,x^4\ , \quad x \neq 0$

1.2.8.

$y = C(\mathrm{e}^x + 5) - \dfrac{\mathrm{e}^x + 5}{\mathrm{e}^x}$

1.3.

1.3.1.

$u'x = u^2 - 2u + 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{y}{x} - 1 = \dfrac{1}{-\ln x + C} \qquad (x > 0)$

1.3.2.

$$u' = u^2 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y+2x} = x + C\,, \quad \text{illetve} \quad y = -2x$$

$$y(1) = -3: \qquad y = -\frac{1}{x} - 2x\,, \quad x > 0$$

1.3.4.

$$y = \sqrt[3]{C\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^{3x}}$$

1.3.5.

$u' - \dfrac{u}{x} = x^3$ elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet $(x \neq 0)$

1.3.6.

$$y = \mathrm{e}^{2x}$$

1.4.

1.4.2.

a) Pl. $|x-2| \leq 1$; $|y-5| \leq 1$ (zárt) téglalapon f és $f'_y = \dfrac{-1}{(y-x)^2}$ folytonos
$\Longrightarrow$ $\exists$ az $x_0 = 2$ pontnak egy olyan környezete, melyben az adott kezdeti érték problémának pontosan egy megoldása van.

b) $y'(2) = (f(2,5) =)\,\dfrac{4}{3}$: a vonalelem meredeksége. Tehát az $\dfrac{y-x+1}{y-x} = \dfrac{4}{3}$ feltételnek eleget tevő pontokban ugyanilyen irányú az iránymező.

c) $T_2(x) = 5 + \dfrac{4}{3}(x-2) + \dfrac{\frac{-1}{27}}{2!}(x-2)^2$

1.4.4.

a) $y'(1) = f(1,2) = 1 = m$
Az izoklina: $x^2 + y^2 - 2xy = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = x \pm 1$

b) Szükséges feltétel:
$y' = 0 = (y-x)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = x$ pontjaiban lehet lokális szélsőérték.
$y'' = \cdots = 2x - 2y + 2y'(y-x) \quad \Longrightarrow$ az $y = x$ egyenes pontjaiban $y'' = 0$ és $y''' = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = x$ pontjaiban nincs lokális szélsőérték.
Jobb megoldás: $y' = (y-x)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs lokális szélsőérték

1.5.

1.5.1.

a) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$; $\qquad y = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{3x}$

b) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} - x + \dfrac{2}{3}$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \sin x + \cos x$

1.5.2.

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{32} e^{5x}$$

1.5.3.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 3x^2 + 4x + 2$$

1.5.4.

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + 2x e^{x} - x - \frac{1}{2}$$

1.5.5.

$$y = C_1 + C_2 e^{-8x} - \frac{1}{2} \sin 2x - 2\cos 2x$$

1.5.6.

$$y = C_1 e^{-5x} \cos 2x + C_2 e^{-5x} \sin 2x - \frac{1}{29} e^{29x}$$

1.5.10.

$$y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{27} x$$

1.5.11.

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + 2x^3 - 3x$$

1.6.

1.6.2.

$$x e^{3y^2} + x^2 + 2x + x^2 y^3 + 3y^3 = C$$

$$y(1) = 0: \quad x e^{3y^2} + x^2 + 2x + x^2 y^3 + 3y^3 = 4$$

1.6.5.

$$y e^{y^2 + 2x} + 3x^2 + 3y = C$$

1.6.6.

$$x^2 e^{2y} + 3x^2 + \sin xy - 6y = C$$

$$y(1) = 0: \quad x^2 e^{2y} + 3x^2 + \sin xy - 6y = 4$$

1.6.7.

$$e^{2x+y} + \frac{x^2}{2} + y^3 = C$$

$$y(0) = 1: \quad e^{2x+y} + \frac{x^2}{2} + y^3 = e + 1$$

1.6.10.

a) $\dfrac{\mu'(x-y^2)}{\mu(x-y^2)} = \dfrac{h'_x - g'_y}{-2y \cdot g - h} = f(x-y^2)$-nek kell teljesülnie

b) $\mu(x-y^2) = x - y^2$

1.7.

1.7.1.

$$\lambda_1 = 2,\ \underline{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1,\ \underline{s}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 1,\ \underline{s}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1,\ \underline{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \underline{s}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \underline{s}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

1.7.3.

$$\lambda_1 = 2,\ \underline{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2+i,\ \underline{s}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1+i\end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 2-i,\ \underline{s}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1+i\end{pmatrix}$$

1.7.4.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \underline{s}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = 1,\ \underline{s}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

2. Függvénysorozatok, függvénysorok

2.1.

2.1.1.

$f(x) = 3x, \qquad x \in \mathbb{R}$

2.1.2.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^2}{n^3} - x}{\frac{x^4}{n^3} + 1 + \frac{3}{n^3}} = -x, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

2.1.3.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{x + (x+2)\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 1, \qquad \text{ha } x > 0$$

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

Tehát $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

2.1.4.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{1}{5}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Nem egyenletes a konvergencia, mert a határfüggvény nem folytonos.
(Az f_n függvények folytonosak.)

2.1.6.

a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sin nx}{n}\right) = 1; \qquad D_f = \mathbb{R}$

b) $||f_n - f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{n} = \frac{1}{n}$

2.1.7.

a) $f(x) \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

b) $||f_n - f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + n^4} = \frac{1}{n^4}$

2.1.8.

a) $f(x) \equiv 0$

b) $||f - f_n|| = \cdots = f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{4n} \to 0\,,$ egyenletes a konvergencia.

2.1.9.

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-x^2}{n} + \left(1 + \dfrac{4}{n}\right) x \right) = x$

b) $||f_n - f|| = \sup\limits_{x\in[0,3]} \dfrac{-x^2+4x}{n} = \left.\dfrac{-x^2+4x}{n}\right|_{x=2} = \dfrac{4}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ egyenletes a konv.

2.1.10.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $||f_n - f|| = \dfrac{\sqrt[n]{n}\ -1}{\sqrt[n]{n}}$

c) $||f_n - f|| \ \to\ 0\,,$ egyenletes a konvergencia.

2.1.12.

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ 2x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \qquad \left(\left(\dfrac{1}{e^{x^2}}\right)^n \to 0, \text{ ha } x \neq 0 \right)$

$[0,1]$-en nem egyenletes a konvergencia, mert f_n-ek folytonosak, de f nem.

$[1,2]$-ön: $||f_n - f|| = \sup\limits_{x\in[1,2]} \left| 2x^2 + \left(\dfrac{1}{e^{x^2}}\right)^n - 2x^2 \right| = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \to 0\,,$ tehát egyenletes a konvergencia.

2.1.13.

a) $f(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $||f_n - f|| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{\sin^2(n^3x^2)}{\sqrt{2n^2+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+3}} \ \to\ 0$

a konvergencia egyenletes és az f_n függvények folytonosak

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

2.2.

2.2.1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2e^x)^n = \dfrac{2e^x}{1-2e^x}$ (geom. sor), ha $|2e^x| < 1$, vagyis $x \in (-\infty, -\ln 2)$

2.2.2.

$s(x) = 2\,\dfrac{(\ln x)^2}{1-\ln x},$ ha $-1 < \ln x < 1\,,$ vagyis $\dfrac{1}{e} < x < e$

2.2.3.

$|f_k(x)| < \frac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens $x \in \mathbb{R}$-en.
(Weierstrass kritérium.)

2.2.4.

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{3^k}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \text{ konvergens (geometriai sor)}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

2.2.6.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$:

$|f_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens a $[0, \pi]$ intervallumon ($\mathbb{R}$-en is) és az f_k függvények folytonosak.

Az előzőek miatt a $\sum\limits^{\infty}$ és az integrál jel felcserélhető.

2.2.7.

$|f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konv. geom. sor $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konv. $(-\infty, \infty)$-en, és $f_n \in C^0_{\mathbb{R}}$ $\Longrightarrow$ az összegfüggvény mindenütt folytonos és $\forall\, [a, b]$-n tagonként integrálható.

2.2.8.

a) $|f_n(x)| < \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens

$\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (pontonként) konvergens $x \in \mathbb{R}$-en

b) $|f'_n(x)| = \dfrac{\left|\frac{1}{n^2} \sin \frac{x+1}{n^2}\right|}{n^2 + 3n + 8} < \frac{1}{n^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ egyenl. konv.

Tehát a feltételek teljesülnek, így $\forall x \in \mathbb{R}$-re deriválható a sor összegfüggvénye.

2.2.10.

$$|f_n(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{n^5}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konv.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ egyenl. konv.}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konv. } \mathbb{R}\text{-en.}$$

$$\sum_{1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{-\sin\left(n^3 + \sqrt{n}\, x\right) \cdot \sqrt{x}}{4\sqrt{n^5} + 3}$$

$$|f_n'(x)| \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konv.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \text{ egyenl. konv.}$$

A fentiek miatt a sor tagonként deriválható.

2.3.

2.3.1.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \cdots = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{4}, \qquad R = 4$$

2.3.2.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)^2 \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}} = \mathrm{e}^2 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$$

2.3.3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad R = 3$$

$x = -4: \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

$x = 2: \quad \sum^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konv.

KT.: $(-4, 2]$

2.3.5.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} = 3 = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{3}, \text{ a végpontokban is konvergens.}$$

Így a konvergencia tartomány: $\quad |x-4| \le \dfrac{1}{3}$

2.3.6.

a) $(-4, 4)$

b) Pl. $[0, 1]$ $\quad$ ($\forall\, [\alpha, \beta] \subset (-4, 4)$ -ben egyenletes a konvergencia.)

c) $z = (x+1)^2$ helyettesítéssel a)-ra visszavezethető. Így a konvergencia tartomány: $-4 < (x+1)^2 < 4$ miatt $|x+1| < 2$, vagyis a $(-3, 1)$ intervallum.

2.3.7.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 2 = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{2}$, a végpontokban is konvergens.

Így a konvergencia tartomány: $\quad |x| \le \dfrac{1}{2}$

Pl. $[\alpha, \beta] = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$

A megfelelő tétel: 1. Segédlet!

Megjegyzés:

$\forall\ [\alpha, \beta] \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ jó (tanult tétel). De most

$$\left|\frac{(-2)^n}{n^2}\ x^n\right| \leq \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{ha } |x| \leq \frac{1}{2}$$

Így a sor egyenletesen konvergens a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon is. Ezért $[\alpha, \beta] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ is jó.

b) $|x+3| \leq \frac{1}{2}$

$|x^3| \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

2.4.

2.4.4.

$$\mathrm{e}^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k\, x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2(x-1)+2} = \mathrm{e}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k\, (x-1)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.4.5.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 8^k\, x^{3k}$$

Konvergencia tartomány: $|-8x^3| < 1, \qquad R = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

2.4.6.

$$f(x) = \frac{2}{8-x} = \frac{1}{4}\, \frac{1}{1-\frac{x}{8}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{8}\right)^n$$

Konvergencia tartomány: $\quad |q| = \left|\frac{x}{8}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 8$

2.4.7.

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1-(-9x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-9x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 9^n\, x^{2n}$$

Konvergencia tartomány: $\quad |q| = |-9x^2| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \frac{1}{3}$

$$g(x) = \operatorname{ch} 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.4.9.

$$f(x)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n \qquad \text{KT.: } |x-1|<3$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

2.4.11.

$$f(x)=\frac{1}{x-5}=\frac{1}{(x-3)-2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x-3}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n \qquad \text{KT.: } |x-3|<2$$

$$\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3(x+1)-3}=\mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3(x+1))^n}{n!}=\mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,(x+1)^n, \qquad x\in\mathbb{R}$$

2.4.12.

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x|\le 1 \qquad \text{L. Segédlet!}$$

$$\operatorname{arctg} 5x^2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(5x^2\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,5^{2k+1}}{2k+1}\,x^{4k+2}$$

$$\text{K.T.:} \quad |5x^2|\le 1 \quad \Longrightarrow \quad R=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2.5.

2.5.1.

$$f(x)=(1+2x^2)^{-1/5}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/5}{k}2^k\,x^{2k}, \qquad R=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_4=\binom{-1/5}{2}2^2=\frac{12}{25}$$

2.5.4.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/9}{k}3^k\,x^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\,, \qquad R=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f^{IV}(0)=4!\,a_4=24\,\tbinom{1/9}{2}\,3^2=-\frac{32}{3}$$

2.5.6.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^2}}=\frac{1}{2}\,\left(1+3x^2\right)^{-1/3}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/3}{k}3^k\,x^{2k}\,, \qquad R=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.5.7.

$$f(x)=\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{1+\frac{3x^4}{16}}=2\,\left(1+\frac{3}{16}\,x^4\right)^{1/4}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \binom{1/4}{k} \left(\frac{3}{16}\right)^{k} x^{4k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \,, \qquad R = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

$f^{(11)}(0) = 11! \; a_{11} = 0$

$f^{(12)}(0) = 12! \; a_{12} = 12! \; 2 \binom{1/4}{3} \left(\frac{3}{16}\right)^{3} = 12! \; 2 \; \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!} \left(\frac{3}{16}\right)^{3}$

3. Többváltozós függvények

3.1.

3.1.1.

Nem létezik, mert pl.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2x+3y}{4x+15y}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{5}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x+3y}{4x+15y}=\lim_{y\to 0}\frac{3y}{15y}$$

Vagy: $\quad x_n=\varrho_n\cos\varphi_n;\quad y_n=\varrho_n\sin\varphi_n$

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n\ \text{tetsz.}}}\frac{2\varrho_n\cos\varphi_n+3\varrho_n\sin\varphi_n}{4\varrho_n\cos\varphi_n+15\varrho_n\sin\varphi_n}=\frac{2\cos\varphi_n+3\sin\varphi_n}{4\cos\varphi_n+15\sin\varphi_n}$$

függ φ_n-től, pl. $\varphi_n=\frac{\pi}{2}$ esetén: $\frac{1}{5}$; $\varphi_n=\pi$ esetén: $\frac{1}{2}$

3.1.2.

Nem létezik, mert

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n\ \text{tetsz.}}}\frac{\varrho_n^2\cos^2\varphi_n+2\varrho_n^4\sin^4\varphi_n}{2\varrho_n^2\cos^2\varphi_n+3\varrho_n^2\sin^2\varphi_n}=\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n\ \text{tetsz.}}}\frac{\cos^2\varphi_n+2\varrho_n^2\sin^4\varphi_n}{2+\sin^2\varphi_n}=\frac{\cos^2\varphi_n}{2+\sin^2\varphi_n}$$

függ φ_n-től, pl. $\varphi_n=\frac{\pi}{2}$ esetén: 0; $\varphi_n=0$ esetén: $\frac{1}{2}$

3.1.3.

Nem létezik, mert pl. $y=mx$ mentén

$$\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx+x^2}{2x^2+3m^2x^2}=\frac{m+1}{2+3m^2},$$

azaz függ m-től.

3.1.4.

a) $\dfrac{3m}{1+2m^2}$

b) nem létezik, hiszen függ m-től.

3.1.5.

Nem létezik, mert

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2\neq-\frac{3}{5}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y^2}{5y^2}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)$$

3.2.

3.2.1.

a)

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left(2x + \frac{x\,\sin mx}{x^2+m^2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2x + \frac{\sin mx}{mx}\cdot\frac{mx}{x+m^2x}\right) = \frac{m}{1+m^2}$$

függ m-től $\quad\Longrightarrow\quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad\Longrightarrow\quad f$ nem folytonos az origóban.

b)

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+0-0}{h} = 2$$

Ha $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x = 2 + \frac{\sin y\cdot(x^2+y^2) - x\,\sin y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

3.2.2.

$f'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{\mathrm{e}^{2y}}(x^2+1)\right) = \dfrac{y}{\mathrm{e}^{2y}}\cdot 2x$

$f''_{xx} = \dfrac{y}{\mathrm{e}^{2y}}\cdot 2$

$f''_{xy} = 2x\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{2y} - y\cdot 2\mathrm{e}^{2y}}{(\mathrm{e}^{2y})^2}$

$f'_y = (x^2+1)\,\dfrac{\mathrm{e}^{2y} - y\cdot 2\mathrm{e}^{2y}}{(\mathrm{e}^{2y})^2} = (x^2+1)\,\dfrac{1-2y}{\mathrm{e}^{2y}}$

$f''_{yy} = (x^2+1)\,\dfrac{-2\mathrm{e}^{2y} - (1-2y)\,2\mathrm{e}^{2y}}{(\mathrm{e}^{2y})^2}$

3.2.5.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ \nexists$, mert

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+2y}{x-2y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \neq f(0,0)$$

b) Mivel f nem folytonos $(0,0)$-ban (hiszen $\nexists$ itt a határérték), így nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

3.2.6.

a) Nem folytonos a függvény az origóban. Pl. $x = 0$ egyenes mentén:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{4y^2}{y^2} = 4 \neq \frac{7}{3} = f(0,0)$$

b) $f'_x = \dfrac{6x(2x^2+y^2) - (3x^2+4y^2)\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2}; \qquad f'_x(1,0) = 0$

$f'_y = \dfrac{8y(2x^2+y^2) - (3x^2+4y^2)\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2}; \qquad f'_y(1,0) = 0$

$\operatorname{grad} f|_{(1,0)} = 0\,\underline{i} + 0\,\underline{j} = \underline{0}$ $\quad$ ($\exists$, mert f'_x, f'_y $K_{(1,0)}$-ban $\exists$ és folyt.)

3.3.

3.3.1.

a)

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{2y^2} = 0 \neq 1 = f(0,0)$$

$\Longrightarrow \quad f$ nem folytonos $(0,0)$-ban $\quad \Longrightarrow \quad$ nem deriválható $(0,0)$-ban.

b) Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x = \frac{(y+1)\cdot 2x(x^2+2y^2) - (y+1)x^2\cdot 2x}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 1}{h} = 0$$

3.3.2.

$f'_x = (y^2+1)\,\dfrac{1\cdot \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\,2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x})^2} \qquad f'_x(0,1) = -1$

$f'_y = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\cdot 2y \qquad f'_y(0,1) = 2$

$f(0,1) = 2$

Az érintősík: $\qquad -1(x-0) + 2(y-1) - (z-2) = 0$

3.3.3.

a) $\operatorname{grad} f|_{(1,0)} = 0\,\underline{i} + 3\mathrm{e}\,\underline{j}$

b) $0\cdot(x-1) + 3\mathrm{e}\cdot(y-0) - (z-\mathrm{e}) = 0$

3.3.5.

$5(x-1)+\frac{15}{4}(y-2)-(z-\frac{7}{2})=0$

3.3.10.

a) $f'_x = 2\mathrm{e}^{3z} \qquad f'_y = \dfrac{1}{2y}\cdot 2 \qquad f'_z = (2x+1)\cdot 3\,\mathrm{e}^{3z}$

$\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = 2\,\underline{i} + \underline{j} + 9\,\underline{k} = [2,1,9]$

b) $\underline{e} \parallel (3\,\underline{i} - 4\,\underline{k}) \quad \Longrightarrow \quad \underline{e} = \dfrac{1}{\sqrt{9+0+16}}\,(3\,\underline{i}-4\,\underline{k}) = \left[\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right]$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f\big|_{P_0}\cdot \underline{e} = 2\cdot\tfrac{3}{5} + 1\cdot 0 + 9\cdot\tfrac{-4}{5} = -\tfrac{30}{5} = -6$$

3.3.11.

a) Igen:

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{2\varrho_n^3\cos^3\varphi_n + \varrho_n^3\sin^3\varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\varrho_n}\underbrace{(2\cos^3\varphi_n + \sin^3\varphi_n)}_{\text{korlátos}} = 0$$

b) Létezik:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = \lim_{t\to +0}\frac{f(\underline{0}+\underline{e}\,t)-f(\underline{0})}{t} \qquad\qquad \underline{e} = \frac{3}{5}\,\underline{i} - \frac{4}{5}\,\underline{j}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = \lim_{t\to +0}\frac{f\left(\frac{3}{5}\,t, -\frac{4}{5}\,t\right)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to +0}\frac{\frac{2\left(\frac{3}{5}\right)^3t^3-\left(\frac{4}{5}\right)^3t^3}{\left(\frac{3}{5}\right)^2t^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2t^2}-0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to +0}\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

3.3.16.

$$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(2,1)} = \sqrt{4^2+(8\ln 2)^2} \qquad\qquad \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(8\ln 2)^2}}\,(4\underline{i}+8\ln 2\underline{j})$$

3.3.17.

a) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0\pm}\frac{|h|}{h} = \pm 1 \;\nexists$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\frac{\sqrt{3k^4}-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\frac{\sqrt{3}k^2}{k} = 0$

b) $K_{(1,2)}$-ben f parciálisai léteznek és folytonosak

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \operatorname{grad} f|_{(1,2)} = f'_x(1,2)\,\underline{i} + f'_y(1,2)\,\underline{j} = \frac{1}{7}\underline{i} + \frac{48}{7}\underline{j},$$

mert $f'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3y^4}} \cdot 2x; \quad f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3y^4}} \cdot 12y^3$

c) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,2)} = \left|\operatorname{grad} f|_{(1,2)}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{48}{7}\right)^2},$ ha $\underline{e} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{48}{7}\right)^2}} \left(\dfrac{1}{7}\underline{i} + \dfrac{48}{7}\underline{j}\right)$

3.4.

3.4.1.

a) $f'_x = -\pi\, \mathrm{e}^{y^2} \sin \pi x \qquad f'_x(-1,1) = 0$

$f'_y = 2y\, \mathrm{e}^{y^2} \cos \pi x \qquad f'_y(-1,1) = -2\mathrm{e}$

$\mathrm{d}f\,((-1,1),(h,k)) = f'_x(-1,1)\cdot h + f'_y(-1,1)\cdot k = -2\mathrm{e}\, k$

$f''_{xx} = -\pi^2\, \mathrm{e}^{y^2} \cos \pi x \qquad f''_{xx}(-1,1) = \pi^2 \mathrm{e}$

$f''_{xy} = -\pi 2y\, \mathrm{e}^{y^2} \sin \pi x \qquad f''_{xy}(-1,1) = 0$

$f''_{yy} = \left(2\mathrm{e}^{y^2} + 2y\, 2y\, \mathrm{e}^{y^2}\right) \cos \pi x \qquad f''_{yy}(-1,1) = -6\mathrm{e}$

$\mathrm{d}^2 f\,((-1,1),(h,k)) = f''_{xx}(-1,1)\ h^2 + 2f''_{xy}(-1,1)\ hk + f''_{yy}(-1,1)\ k^2 = \pi^2 \mathrm{e}\ h^2 - 6\mathrm{e}\ k^2$

b) Érintősík:

$$f'_x(-1,1))(x-(-1)) + f'_y(-1,1)(y-1) - (z - f(-1,1)) = 0$$

$$-2\mathrm{e}(y-1) - (z - (-\mathrm{e})) = 0$$

3.4.2.

$f'_x = h'(xy+x^2)\cdot(y+2x)$

$f''_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(h'(xy+x^2)\right)\cdot(y+2x) + h'(xy+x^2)\,\dfrac{\partial}{\partial y}(y+2x) =$

$= h''(xy+x^2)\cdot x(y+2x) + h'(xy+x^2)\cdot 1$

3.5.

3.5.2.

Nincs lokális szélsőértéke.

3.5.6.

$f'_x = 3x^2 - 12 = 0 \qquad x = \pm 2$

$f'_y = 4y - 1 = 0 \qquad y = \dfrac{1}{4}$

$P_1\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$ ill. $P_2\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$ jöhet szóba.

$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24x$

$D_{P_1} > 0, \quad f''_{xx}|_{P_1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ lok. min. van P_1-ben.

$D_{P_2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ nincs lok. szé. P_2-ben.

3.5.7.

Lok. min.: $f(0,1) = -4$

3.5.8.

a) ...

b) $f'_x = 2(x - y + 1) - 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2 + 10x - 4x^3 - 2y = 0$

$f'_y = 2(x - y + 1)(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x + 1$

Ezt behelyettesítve az 1. egyenletbe: $4x(x^2 - 2) = 0$
A szükséges feltétel a következő pontokban teljesül:
$P_1(0,1); \quad P_2(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}); \quad P_3(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 - 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 24x^2$$

$D(0,1) = 16 > 0, \quad f''_{xx}(0,1) = 18 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ lok. min. $f(0,1) = -4$

$D|_{P_2} < 0; \; D|_{P_3} < 0 \quad \Longrightarrow \quad P_2$-ben és P_3-ban nincs lokális szélsőérték.

3.5.10.

f folytonos és T kompakt $\quad \Longrightarrow \quad$ f-nek van minimuma és maximuma T-n (Weierstrass II.).

$f_{min} = f(1,0) = 5; \qquad f_{max} = f(0,0) = 16$

3.6.

3.6.3.

a) $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$(r,\varphi) \in A^*$ esetén $(x,y) \in A$

b) $I = \lim\limits_{R\to\infty} I_R, \qquad \mathrm{e}^2 \le x^2+y^2 \le R^2, \qquad \mathrm{e} \le r \le R, \qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$I_R = \int_{\mathrm{e}}^{R}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2(\ln r)^2}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_{\mathrm{e}}^{R}\frac{1}{r}(\ln r)^{-2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left.\frac{-1}{\ln r}\right|_{\mathrm{e}}^{R} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-1}{\ln R}+1\right)$$

$$I = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\ln R}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3.6.5.

Improprius integrál, polártranszformációval oldjuk meg.

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad |J| = r, \quad \varrho \le r \le \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$I = \lim\limits_{\varrho\to+0} I_\varrho$

$$I_\varrho = \int_{\varrho}^{1/\mathrm{e}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r^2\ln^3 r}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_{\varrho}^{1/\mathrm{e}}\frac{1}{r}(\ln r)^{-3}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left.\frac{(\ln r)^{-2}}{-2}\right|_{\varrho}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2} - \frac{1}{(\ln\varrho)^2}\right) = -\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{(\ln\varrho)^2}\right)$$

$$I = \lim_{\varrho\to+0} -\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{(\ln\varrho)^2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

3.6.6.

$\dfrac{128}{9}$

3.7.

3.7.2.

a) ...
b) ...
c) $x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z, \qquad |J| = r$
$0 \le z \le 16 - r^2, \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad 0 \le r \le 2$

$$I = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{16-r^2} z^2 \cdot r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^\pi r \left. \frac{z^3}{3} \right|_{z=0}^{16-r^2} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^\pi r\,(16-r^2)^3 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,\frac{-1}{2} \int_0^2 -2r(16-r^2)^3 \, \mathrm{d}r = -\,\frac{\pi}{6} \left. \frac{(16-r^2)^4}{4} \right|_0^2 = -\frac{\pi}{24}\left(12^4 - 16^4\right)$$

3.7.4.

Hengerkoordinátás transzformációval:
$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z, \qquad |J| = r$
$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 1 \le r \le 2, \qquad 0 \le z \le 9 - r^2$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2\varphi \cdot r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \cos^2\varphi \cdot \underbrace{r^3 z \Big|_0^{9-r^2}}_{r^3(9-r^2)} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \left. \left(9 \cdot \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \right|_{r=1}^2 \mathrm{d}\varphi = \left(9 \cdot \frac{2^4}{4} - \frac{2^6}{6} - \frac{9}{4} + \frac{1}{6} \right) \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left(36 - \frac{32}{3} - \frac{9}{4} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{279}{12}\pi$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0 \right)$$

3.7.5.

$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 12 - (x^2 + y^2)$
A két felület metszésvonala a $\sqrt{x^2 + y^2} = 12 - (x^2 + y^2)$ egyenletből: $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, tehát az $x^2 + y^2 = 3^2$ kör (a $z = 3$ síkban).

Hengerkoordinátás transzformációval:
$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z, \qquad |J| = r$
$r \le z \le 12 - r^2, \qquad 0 \le r \le 3, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^{12-r^2} r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \underbrace{r\ z\big|_{z=r}^{12-r^2}}_{12r-r^3-r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(6r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^3\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(6\cdot 3^2 - \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3}\right) = 2\pi\left(45 - \frac{3^4}{4}\right)$$