Megoldási útmutatók, eredmények

A feladatok megoldásakor mindig ismételje át a feladatban szereplő fogalmak definícióit.

A szükséges fogalmak, definíciók: valószínűségi változó, diszkrét-, folytonos valószínűségi változó. Műveletek eseményekkel, egymást kizáró, független események, feltételes valószínűség fogalma. Eloszlásfüggvény, valószínűségeloszlás, sűrűségfüggvény ezek tulajdonságai, kapcsolatuk, jelentésük. Tanult nevezetes eloszlások, azok tulajdonságai, paraméterei. Használja a zh-n, vizsgán is használható összefoglaló táblázatot.

A szöveges feladat megoldását mindig úgy kezdje, hogy határozza meg a valószínűségi változó jelentését, az általa felvehető értékeket, folytonos-e diszkrét-e, típusa.

Nagyon hasznos, ha felrajzolja a különböző függvényeket, ha a konkrét kérdésnél, feladatnál többet is megpróbál értelmezni.

A számításokat minden esetben ellenőrizze! Fontos, hogy az egyenletek megoldását, az integrálást is gyakorolja. Nem elég csak a megoldás gondolatmenetét megérteni.

1.) A ξ változó jelentse a továbbított ötös jelsorozatban a helyes jelek számát. Így értékkészlete a {0,1,2,3,4,5} számokból álló halmaz. Egy továbbított jel vagy helyes (siker, 0,8 valószínűséggel), vagy hibás (kudarc, 0,2 valószínűséggel). Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a továbbított jelek egymástól függetlenül helyesek, vagy tévesek. Így a változó binomiális eloszlásúnak tekinthető, n=5 és p=0,8 paraméterekkel. Ahhoz, hogy jól történjen a dekódolás legalább három helyes továbbított jelnek kell lenni. A keresett valószínűség tehát a $\{\xi=3\}$, $\{\xi=4\}$, $\{\xi=5\}$ egymást kizáró események összegének valószínűsége: $P(\xi\geq 3)=\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}0{,}8^k 0{,}2^{5-k}$. *Számolja ki a valószínűséget!*

2.) A kísérletnek két kimenetele van, balkezes (siker, p=0,13) nem balkezes (kudarc q=0,87). A kísérletet n=1200-szor egymástól függetlenül elvégezzük. Legyen ξ valószínűségi változó jelentése a balkezesek száma ebben az 1200 fős csoportban. Így ξ diszkrét és felveheti a 0,1,2,…,1200 értékeket, vagyis ξ ∈ B(1200, 0,13).

$$P(\xi\geq 120)=\sum_{120}^{1200}\binom{1200}{k}(0{,}13)^k(0{,}87)^{1200-k}$$

értéket kell meghatározni. Ennek, de az ellentett eseménynek a kiszámítása is kellemetlen, hosszú számolás, ezért próbáljunk valamilyen határeloszlás tételt alkalmazni. Ilyen a Moivre- Laplace, amelynek a feltételei teljesülnek, mivel

$1200\cdot 0{,}13>5$, $1200\cdot 0{,}87>5$.

$$P(\xi\geq 120)=P\left(\frac{\xi-1000\cdot 0{,}13}{\sqrt{100\cdot 0{,}13\cdot 0{,}87}}\geq\frac{120-1000\cdot 0{,}13}{\sqrt{100\cdot 0{,}13\cdot 0{,}87}}\right)\approx 1-\Phi(-0{,}940)=\Phi(0{,}940)\approx 0{,}8264$$

A Moivre-Laplace tétel is egy példa a normális eloszlás jelentőségére, alkalmazására.

3.) A ξ valószínűségi változó jelentése legyen az allergiás betegek száma a 20 fős csoportban. A kísérletnek két kimenetele van, a siker (allergiás valaki) valószínűsége 0,3 a kudarc (nem allergiás) valószínűsége 0,7. Feltételezhető, hogy a csoport tagjai egymástól függetlenül allergiásak, vagy sem. Ezért a ξ binomiális eloszlást követ n=20 és p=0,3 paraméterekkel. ξ várható értéke np=6, szórásnégyzete npq=4,2.

a.) $P(\xi=6)=\binom{20}{6}0{,}3^6 0{,}7^{14}=0{,}1916.$

b.) $P(\xi<6)=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{20}{k}0{,}3^k 0{,}7^{20-k}=0{,}4163.$

c.) $P(4\leq\xi\leq 8)=\sum_{k=4}^{k=8}\binom{20}{k}0{,}3^k 0{,}7^{20-k}=0{,}7796.$

4.)Legyen a ξ valószínűségi változó jelentése azoknak a napoknak a száma, amelyeken a napi hőmérsékleti csúcs meghaladta a 18°C-ot az adott hét során! Ha feltesszük, hogy az egymást követő napok napi hőmérsékleti maximuma egymástól független, akkor ξ binomiális eloszlással jellemezhető n=7 és p=0,65 paraméterekkel.

a.) $P(\xi \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{7}{k} 0{,}65^k 0{,}35^{7-k} = 0{,}1998.$

b.) $M(\xi) = 7 \cdot 0{,}65 = 4{,}55.$

5.) Legyen a ξ valószínűségi változó jelentése a háromgyerekes családokban a lányok száma! Mivel az egymást követő gyerekek neme egymástól független esemény, ezért a ξ tekinthető egy n=3 és p=0,492 paraméterű binomiális eloszlású változónak.

a.) $P(\xi = k) = \binom{3}{k} 0{,}492^k 0{,}508^{3-k}$, összefüggésből a k értékek (k=0,1,2,3) behelyettesítésével kapjuk a valószínűségeloszlást. $M(\xi) = 3 \cdot 0{,}492 = 1{,}476$, $D(\xi) \approx 0{,}8659$.

b.) $P(\xi \le 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} 0{,}492^k 0{,}508^{3-k} = 0{,}8809.$

6.) Az $np = \frac{6}{7}$ és $npq = \frac{36}{49}$ egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldani.

7.) A feladat összetett, több „kísérlet”, így több valószínűségi változó szerepel benne. Az egyik változó X, amely az első nyereményig szükséges játszmák számát jelenti. X felveheti az 1,2,… értékeket. Így X olyan geometriai eloszlású változó, amelynek várható értéke a játékos tapasztalata szerint 63 => siker valószínűsége 1/63.

A másik változó Y jelenti az n-szer megismételt játéksorozatban a nyert játszmák számát. Minden játékban két kimenetel van: a siker (nyer) p=1/63 valószínűséggel, kudarc (nem nyer) q=62/63 valószínűséggel, az egyes játékok kimenetele egymástól független. Az Y felveheti a 0,1,…,n értékeket. Vagyis Y egy n, p=1/63 paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó $\left(Y \in B\left(n, \frac{1}{63}\right)\right)$. Az eredeti feladat $P(Y \ge 1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{63}\right)^k \left(\frac{62}{63}\right)^{n-k} \ge 0{,}99$ egyenlőtlenség megoldását jelentené, ami igen nehéz feladat, hiszen *n* a kísérletek száma az ismeretlen. Ehelyett a komplementer esemény valószínűségét számoljuk. Így az $P(Y = 0) = \left(\frac{62}{63}\right)^n \le 0{,}01$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Innen $n \ge 288$ a megoldás. Vagyis ezekkel a feltételekkel legalább 288-szor kell megismételni a kísérletet, a játékot.

Megjegyzés: Ez a játékszám jóval nagyobb, mint 63. Számolja ki mi annak a valószínűsége, hogy a 63. játszma lesz az első, amelyben nyerni fog a játékos.

8.) A valószínűségi változó jelentése legyen a tárgy teljesítéséhez szükséges vizsgák száma, a sikerre való várakozás. Értékei lehetnek: 1,2,…. Tekinthetjük geometriai eloszlásúnak 0,6 siker valószínűséggel. Így a vizsgák számának várható értéke: $\frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67$, tehát a hallgatók átlagban 1,67-szer vizsgáznak.

9.) A sikerre (4 méternél nagyobb ugrás) való várakozás, tehát geometriai eloszlás, 1/10 siker valószínűséggel, ha azt feltételezzük, hogy az egymást követő ugrások hossza egymástól független esemény.

10.) A sikerre való várakozás, szintén geometria eloszlás, ahol a siker valószínűsége 1/6.

11.) Legyen a ξ valószínűségi változó jelentése az egy táblában lévő hibák száma. Így a változó felveheti a 0,1,2,.. értékeket. Tehát a változó diszkrét eloszlású, és Poisson eloszlást követ, amelyre λ=0,5. (Térben, időben történő pontszerű elhelyezkedés.)

a.) Az a kérdés, hogy a táblák milyen valószínűséggel, hány százalékban lesznek hibátlanok. A $P(\xi=0)=\frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5}$ értéket keressük, ami 0,606. Vagyis a táblák 60,6 %-a lesz hibátlan.

b.) A valószínűség egyenlő a $P(\xi=0 | 0\le\xi\le 3)$ feltételes valószínűséggel. Ki kell számolni a feltételes valószínűséget $\frac{P(\xi=0;0\le\xi\le 3)}{P(\xi=0+\xi=1+\xi=2+\xi=3)}$. Figyelembe kell venni, hogy a { $\xi=0$ } esemény maga után vonja a $\{0\le\xi\le 3\}$ eseményt, valamint azt, hogy a nevezőben szereplő események egymást kizáró események. *Számolja ki a valószínűséget!*

c.) A kísérlet az, hogy 100 db táblát megvizsgálunk, és azt figyeljük, hogy egy tábla tartalmaz-e hibát, vagy sem. Tehát két kimenetel van, hibátlan (siker), vagy tartalmaz hibát (kudarc). Az η valószínűségi változó jelentése legyen a hibátlan táblák száma. Így lehetséges értékei a {0,1,…,100} halmaz elemei. Vagyis η egy B(100, 0,606) eloszlású valószínűségi változó. Keressük a $P(\eta=100)=\binom{100}{100}0{,}606^{100}(1-0{,}606)^0$ értéket. *Végezze el a számolást!*

Gondolkodhattunk volna úgyis, ha a hiba várható értéke egy táblában 0,5, akkor 100 táblában 100*0,5=50. Azaz 100 tábla esetén olyan Poisson eloszlásról van szó, amelyre λ=50. Így annak a valószínűsége, hogy 100 tábla közül mindegyik hibátlan, azaz egyetlen hibás sem lesz $\frac{50^0}{0!}e^{-50}$, ami megegyezik a fenti értékkel.

12.) Az X valószínűségi változó jelentése legyen a két óra alatt érkező hívások száma! Az X változó szintén Poisson eloszlást követ. Annyit tudunk, hogy egy óra alatt átlagban 2 hívás érkezik, akkor 2 óra alatt a hívások átlaga (várható értéke) 4. Vagyis az eloszlás paramétere 4.

13.) Az X valószínűségi változó jelentése a regisztrált részecskék száma. A változó diszkrét eloszlású, felveheti a 0,1,2,…,n értékeket. Mivel a *p* siker valószínűség kicsi és feltehetőleg n elég nagy, ezért a binomiális eloszlású valószínűségi változó közelíthető $\lambda=np$ paraméterű Poisson eloszlással. $P(X\ge 4)=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. A végtelen sorral történő számolás helyett a komplementer esemény valószínűségének meghatározásával ténylegesen a $1-\sum_{k=0}^{3}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ge 0{,}99$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Innen λ=10 =>n=10^5.

14.) A kiszolgáló egységhez érkező ügyfelek száma, többnyire Poisson eloszlással jellemezhető. a változó jelentése legyen az időegység alatt érkező ügyfelek száma. Vigyázzunk a mértékegységekkel!

a.) Az eloszlás paraméter nincs megadva. A megadott valószínűségből kell meghatározni. $P(\xi=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\frac{1}{2}}$ összefüggésből adódik, hogy a 20 perc alatt érkező ügyfelek számának várható értéke (az eloszlás paramétere) 0,5. Ekkor a 60 perc alatt érkező az ügyfelek számának várható értéke 1,5. $P(\xi=0)=\frac{1{,}5^0}{0!}e^{-1{,}5}\approx 0{,}23$ a keresett valószínűség.

b.) Az esemény komplementerének valószínűségét könnyebb kiszámolni.

15.) A változó egyenletes eloszlású, így sűrűségfüggvénye:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b} & ha \quad x\in(0,b)\\ 0 & különben\end{cases}$ és tudjuk, hogy $\int_0^1 \frac{1}{b}dx=\frac{3}{4}$ => b= $\frac{4}{3}$. $M(\xi)=\frac{2}{3}$, $D^2(\xi)=\frac{4}{27}$

Fejezze be a példát, írja fel az eloszlásfüggvényt!

16.) Legyen a Z valószínűségi változó jelentése a levél érkezésének időpontja. Tudjuk, hogy egyenletes eloszlású, de nem tudjuk, hogy mely intervallumon. A várható értéke, az intervallum közepe ismert, 17, adott a szórás is. Meg kell oldani az: $\frac{a+b}{2}=17$; $\frac{b-a}{\sqrt{12}}=1$ két ismeretlenes, két egyenletből álló lineáris egyenletrendszert. Ha az intervallum határait kiszámolta, akkor $P(16<Z<22)=\int_{16}^{\min\{22,b\}} f(x)dx.$ Rajzolja fel a függvényt és vigyázzon a határokra!

17.) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}} & ha \quad x\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\\ 0 & különben\end{cases}$. Ekkor a várható értéke 0, a szórása 1. Táblázat!

Keressük a $P(|\xi-0|\geq 1)$ valószínűséget. Ez a valószínűség két integrál összege: $\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{2\sqrt{3}}dx+\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}}dx$. Fejezze be!

18.)Legyen az Y valószínűségi változó jelentése a hívás időpontja. A sűrűségfüggvénye:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-8} & ha \quad x\in(8,b)\\ 0 & különben\end{cases}$ mivel tudjuk, hogy $\int_8^{10}\frac{1}{b-8}dx=0{,}8$ a *b* értéke meghatározható, *b*=10,5.

a.) $P(9{,}5<Y<10)=\int_{9{,}5}^{10}\frac{1}{10{,}5-8}dx$ Fejezze be!

b.) $P(9{,}5<Y<10|Y>9{,}5)$ feltételes valószínűséget keressük. Végezze el a számolást a feltételes valószínűsség definíciójának és az $\{9{,}5<Y<10\}\subseteq\{9{,}5<Y\}$ összefüggésnek a felhasználásával.

19.) A feladat összetett, két kísérletből, két valószínűségi változóból áll. Az egyik ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az eloszlásfüggvényét alkalmazva: $P(4<\xi<4{,}5)=\frac{4{,}5-4}{8-0}=\frac{1}{16}$.

Van egy másik valószínűségi változó η, amely értéke azt adja meg, hogy 50 egymástól független kísérletből hánynak az eredménye esik a megadott intervallumba. Ekkor η felveheti a 0,1,2,…,50 értékeket. Így η binomiális eloszlású valószínűségi változó n=50 és p=1/16 (amit az első részben kiszámoltunk) paraméterekkel. Ki kell számolni $P(\eta\leq 3)$ valószínűséget. A $\{\xi\leq 3\}$ esemény 4 egymást kizáró esemény összege, ezért a

$$P(\eta\leq 3)=\sum_{k=0}^{3}\binom{50}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^k\left(\frac{15}{16}\right)^{50-k}=0{,}6184.$$

20.) Az exponenciális eloszlás használható olyan élettartamot jelentő valószínűségi változó eloszlásának leírására, amelyben a meghibásodás nem a használati időtől, hanem valamilyen véletlen esemény (pl. feszültségingadozás) miatt következik be. Bebizonyítottuk, hogy az exponenciális eloszlásnak „nincs emlékezete" (örökifjú tulajdonság). Így $P(\xi\geq 1000+6000|\xi\geq 6000)=P(\xi\geq 1000)$. Az ellentett esemény valószínűsége, az exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének, valamint az $M(\xi)=\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ felhasználásával:

$P(\xi\geq 1000)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{5000}1000}\right)=e^{-\frac{1}{5}}$ adódik.

21.) Használjuk fel, hogy exponenciális eloszlás esetén $M(\xi)=D(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, amiből $\lambda=\frac{1}{1000}$.

$P(\xi \geq 300)=\int_{3000}^{\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx=$, vagy az ellentett esemény és az eloszlásfüggvényének a felhasználásával

$P(\xi \geq 3000)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{1000}3000}\right)=e^{-3}$.

22.) Elvárás: annak a valószínűsége, hogy a szerkezet élettartama x-nél rövidebb legfeljebb 0,05 legyen.

$P(\xi < x)=1-e^{-\frac{1}{1200}x} \leq 0{,}05$=> $x \approx 61{,}55$. Mivel napi 1 óra üzemidőt számítunk, ezért legfeljebb 61 nap legyen a garanciaidő.

23.) A megoldás menete, a felhasznált összefüggések, mint a 20. feladatban.

24.) Ennek a feladatnak a megoldásához azt kell meggondolni, hogy a λ paraméterű Poisson eloszlás esetén, milyen eloszlással jellemezhető a két esemény bekövetkezése között eltelt idő. Jelölje ξ az első vevő (esemény) érkezéséig eltelt időt! Annak a valószínűsége, hogy az x>0 hosszúságú időtartam alatt egy vevő sem érkezik (egyszer sem következik be az esemény): $P(\xi > x)=\frac{(\lambda x)^0}{0!}e^{-\lambda x}=e^{-\lambda x}$. Így a két vevő (esemény) érkezése között eltelt idő olyan exponenciális eloszlással jellemezhető, amelynek paramétere szintén λ. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha óránként (60 perc alatt) átlagban 30 vevő érkezik, akkor két vevő érkezése között eltelt idő átlagosan 1/30 óra, azaz 2 perc. Így a keresett valószínűségek meghatározásához a szintén λ paraméterű, de exponenciális eloszlást kell használni.

a.) $1-F\left(\frac{2}{60}\right)=e^{-30\frac{2}{60}}=0{,}37$

b.) $F\left(\frac{3}{60}\right)=1-e^{-30\frac{3}{60}}=0{,}78$

c.) $F\left(\frac{3}{60}\right)-F\left(\frac{1}{60}\right)$. Végezze el a számolást!

25.) Folytonos valószínűségi változók esetén az ilyen típusú valószínűségek meghatározása a sűrűségfüggvény adott intervallum fölé eső területének a kiszámításával, azaz a sűrűségfüggvény adott intervallumon történő integrálásával lehetséges. Az eloszlásfüggvény ismeretében történhet az eloszlásfüggvény meghatározott helyeken vett helyettesítési értékéből is megkaphatjuk a keresett valószínűséget, de csak akkor, ha az eloszlásfüggvény ismert, illetve sűrűségfüggvénye integrálását el tudjuk végezni.

Ha a sűrűségfüggvény integráljának meghatározása csak numerikus módszerek alkalmazásával (pl. sorfejtéssel) lehetséges, ezekhez az eloszlásokhoz eloszlásfüggvény táblázatok készültek, hogy ne kelljen minden alkalommal elvégezni a rengeteg számítást. Ha ξ egy m, σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a $\frac{\xi - m}{\sigma}$ transzformációval, egy új η valószínűségi változót kapunk, amely $\eta \in N(0{,}1)$ változó, azaz standard normális eloszlású. A sűrűségfüggvény várható érték körüli szimmetriáját az eloszlásfüggvényre alkalmazva az $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ összefüggést kapjuk. Így a bármilyen paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értékét minden valós számra a standard normális eloszlásfüggvény Φ nemnegatív értékekre vonatkozó táblázatából meg tudjuk határozni.

a.) $P(\xi > x) = 0{,}5$ Az ellentett esemény valószínűségét kell felhasználnunk, mivel definíció szerint $F(x) = P(\xi < x)$, és mivel folytonos valószínűségi változóról van szó, ezért P(ξ=x)=0. $P(\xi > x) = 1 - P(\xi < x)$. Standardizálás után $1 - P(\frac{\xi - 6}{3} < \frac{x-6}{3}) = 1 - \Phi(\frac{x-6}{3}) = 0{,}5$. A kérdés az, hogy a független változó milyen értékére veszi fel a Φ függvény a 0,5 értéket. Ebből $\frac{x-6}{3} = 0$ => x=6. Maga a várható érték. Ha a normális eloszlás sűrűségfüggvényének tulajdonságait jól ismerjük, akkor számolni sem kell, hiszen a normális eloszlás esetében igaz, hogy M(ξ)=Medián(ξ).

b.) $P(x < \xi < 9) = F(9) - F(x) = 0{,}2$ összefüggést kell alkalmazni. Standardizálás után a következő egyenletet kell megoldani. $P(\frac{x-6}{3} < \frac{\xi-6}{3} < \frac{9-6}{3}) = \Phi(\frac{9-6}{3}) - \Phi(\frac{x-6}{3}) = 0{,}2$ => x= 7,08

c.) $P(4{,}2 < \xi < 6{,}1) = ?$ Standardizáljuk, majd alkalmazzuk a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggést. Fejezze be a számolást!

Rajzolja fel az N(6,3) és a N(0,1) eloszlások sűrűségfüggvényét! Értelmezze a feladatot, jelölje be a feladatban szereplő területeket!

26. Jelentse X a készülék élettartamát, azaz a meghibásodásig eltelt időt. Erről tudjuk, hogy $X \in N(6{,}3;2)$. Keressük azt az x értéket, amelyre $P(X < x) \le 0{,}1$. Azaz $\Phi\left(\frac{x-6{,}3}{2}\right) \le 0{,}1$ egyenletet kell megoldani. Mivel az eloszlásfüggvény 0,5-nél kisebb értékeket negatív értékekre vesz fel, ezért $\Phi\left(\frac{6{,}3-x}{2}\right) = 1 - 0{,}1$ egyenletet kell megoldani. Fejezze be!

27. Legyen X olyan valószínűségi változó, amely a deszkák hosszát jelenti => folytonos, még az is adott, hogy X∊ N(400, 3).

a.) $P(398 \le X < 401) = F(401) - F(398)$, mivel folytonos a valószínűségi változó, ezért 0 annak a valószínűsége, hogy egy adott értéket (pl. 398) vesz fel. Mivel normális eloszlású a változó és ennek az eloszlásfüggvényét nem tudjuk meghatározni egy képlet formájában, ezért standardizálás után a N(0,1) eloszlásfüggvény táblázatát használjuk.

b.) Vagyis $P\left(\frac{398-400}{3} \le \frac{X-400}{3} < \frac{401-400}{3}\right) = \Phi\left(\frac{401-400}{3}\right) - \Phi\left(\frac{398-400}{3}\right)$.

Felhasználva a standard normális eloszlásfüggvény tulajdonságait, a keresett valószínűség:

$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right)$. Fejezze be a számítást!

c.) A $P(397{,}5 \le X \le 402{,}5)$ valószínűséget keressük. A standardizálja, majd keresse ki a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékeit a táblázatból!

28.) Most az intervallum felső határa a kérdés. Tudjuk, hogy $P(2 \le \xi < A) \ge 0{,}5$. Standardizálás után a $P\left(\frac{2-3}{2} \le \frac{\xi-3}{2} \le \frac{A-3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{2}\right) \ge 0{,}5$ egyenlőtlenséget kell megoldani úgy, hogy közben most is fel kell használni azt, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, mivel a táblázatban az eloszlásfüggvény értéke csak a nemnegatív valós számokra adott.

29.) A valószínűségi változó jelentése legyen a zajszint dB-ben. Ez folytonos és N(45, σ) eloszlású. A mérési (tapasztalati) adatokból arra következtetünk, hogy $P(\xi \ge 50) = 0{,}1$ és $M(\xi) = 45$ dB. Keressük $P(\xi < 37) = F(37)$ értékét. Standardizálás után a standard normális eloszlásfüggvény táblázatát kell használni. A $P\left(\frac{\xi-50}{\sigma} > \frac{50-45}{\sigma}\right) \to 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}9$ egyenletet kell megoldani. Számolja végig!

30.) Ha a valószínűségi változó jelentése a céghez beérkező megrendelések száma, akkor ez valójában diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Mivel azonban a megrendelések száma nagyon nagy, és sok véletlen hatás együttesének az eredménye is lehet, ezért ilyen esetben – esetleg korábbi megfigyelések alapján- használhatunk folytonos eloszlást, a normális eloszlást. A ξ valószínűségi változó jelentése a naponta beérkező megrendelésszám, N(m, 10). Tudjuk, hogy $P(\xi < 20) = F(20)$ => A $P\left(\frac{\xi-m}{10} < \frac{20-m}{10}\right) = \Phi\left(\frac{20-m}{10}\right) = 0{,}1$ összefüggésből az m értékét kell meghatározni a standard normális eloszlásfüggvény táblázatból, amely 0-nál kisebb értékekre nem tartalmazza az eloszlásfüggvény értékeket. Így az $1 - \Phi\left(\frac{m-20}{10}\right) = 0{,}1$ egyenletet kell megoldani. $\Phi\left(\frac{m-20}{10}\right) = 0{,}9$ alapján a táblázatból azt kell megkeresni, milyen értékre veszi fel az eloszlásfüggvény a 0,9 értéket. Ez a hely 1,29 => $\frac{m-20}{10} = 1{,}29$ => m=33.

31.) A feladat két részből áll. Az első részben szerepel két valószínűségi változó: ξ_1 amely N(2;0,14) és ξ_2, amely N(2;0,08) eloszlású, mind a kettőnek a jelentése a betöltött folyadék mennyisége. A standard normális eloszlásfüggvény táblázatának segítségével ki kell számítani a várható érték körüli 0,1 dl ingadozás valószínűségét a következő összefüggések alapján:

$$P(1{,}9 < \xi_1 < 2{,}1) = P\left(\frac{1{,}9-2}{0{,}14} < \frac{\xi_1 - 2}{0{,}14} < \frac{2{,}1-2}{0{,}14}\right) = \Phi(0{,}71) - \Phi(-0{,}71) = 2 \cdot \Phi(0{,}71) - 1$$

$$P(1{,}9 < \xi_2 < 2{,}1) = P\left(\frac{1{,}9-2}{0{,}08} < \frac{\xi_2 - 2}{0{,}08} < \frac{2{,}1-2}{0{,}08}\right) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) = 2 \cdot \Phi(1{,}25) - 1.$$

Az első géppel töltött térfogat 0,52 valószínűséggel ingadozik a várható érték körül legfeljebb 0,1 dl-rel, a második géppel töltött térfogat 0,78 valószínűséggel. *Próbálja értelmezni ezt az eredményt.*

A feladat második részében szerepel két esemény G_1, melynek jelentése az 1. géppel töltés, G_2, jelenti a 2. géppel töltést. Ez a két esemény teljes eseményrendszert alkot. (Nincs harmadik gép és egy üvegbe nem töltenek két gépből). Ugyanehhez a kísérlethez tartozik egy harmadik esemény: E a várható értéktől való eltérés adott határon belül. Keressük E teljes valószínűségét az egész készletben, függetlenül attól, hogy melyik géppel töltötték a palackot. Tudjuk: $P(G_1)=0{,}6$, $P(G_2)=0{,}4$, valamint $P(E|G_1) = 0{,}52$ és $P(E|G_2) = 0{,}78$.

A teljes valószínűség tétele alapján: $P(E) = 0,52 \cdot 0,6 + 0,78 \cdot 0,4 = 0,624$.