

5. feladatsor

Tanult nevezetes eloszlások

Diszkrét eloszlások (Binomiális, Geometria, Poisson eloszlások)

1. A távközlési csatorna kétféle jel (0 és 1) továbbítására képes. A hiba valószínűsége 0,2. A nagyobb megbízhatóság érdekében a 00000 jelet küldik a 0 helyett és a 11111 jelet az 1 helyett. A dekódolás úgy történik, hogy amelyik jelből több van, azt tekintik helyes jelnek. Mi a valószínűsége, hogy a dekódolás során nem követünk el hibát? Milyen feltételezésre van szükség?
2. Egy népességben a balkezesek aránya 13%. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 főt kiválasztva a balkezesek száma legalább 120?
3. A lakosság 30%-a szenved valamilyen allergiás betegségben. Egy kurzus hallgatói közül 20-at kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy
 - a. az allergiás betegségben szenvedők aránya közöttük is 30%,
 - b. az allergiában szenvedők száma a várható értéknél kisebb,
 - c. az allergiában szenvedők száma a várható érték egy szórásnyi távolságán belül van?
4. Tapasztalatok alapján annak a valószínűsége, hogy egy októberi napon a hőmérséklet 18°C fölé emelkedik 0,65.
 - a. Mi annak a valószínűsége, hogy a hónap egy kiválasztott hetében legfeljebb 3 napon lesz a hőmérsékleti csúcs 18°C felett?
 - b. Október folyamán mennyi lesz a hetenkénti átlaga az ilyen napok számának?
5. Megfigyelések szerint 1000 újszülöttről átlagosan 508 a fiú és 492 a lány. A háromgyerekes családok közül egyet kiválasztunk és az X valószínűségi változó jelentése legyen a lánygyerekek száma.
 - a. Írja fel X valószínűség eloszlását!
 - b. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a lányok száma legfeljebb kettő?
6. Adja meg az X binomiális eloszlású valószínűségi változó paramétereit, ha tudjuk, hogy a várható értéke és a szórása is 6/7!
7. *Egy szerencsejátékos megfigyelte, hogy átlagosan 63 próbálkozás után nyer. Legalább hányszor kell neki játszani ahhoz, hogy 0,99 valószínűséggel nyerjen?
8. Tapasztalatok szerint a hallgatók a Statisztika vizsgán 0.6 valószínűséggel mennek át. Mindenki addig ismételi, amíg nem sikerül a vizsgája. Várhatóan hányszor kell elmenni, vizsgázni a tárgyból?
9. Egy távolugrónak átlagosan a tizedik próbálkozásra sikerül 4 méternél nagyobbat ugrani. Mi a valószínűsége annak, hogy a válogatón ez már a harmadik kísérletre sikerül?
10. Egy hibás készüléket átlagosan 6 próbálkozás után tudunk bekapcsolni. Mi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi alkalommal éppen a 6. próbálkozásra sikerül bekapcsolni a készüléket?
11. * Egy üzemben üvegtáblákat gyártanak, amelyben hibák is vannak. A ξ változó értéke legyen a hibák száma. Tudjuk, hogy $M(\xi)=0,5$.
 - a. Határozza meg, hogy 100 tábla közül hány lesz hibátlan!
 - b. Mennyi lesz a hibátlan táblák száma, ha a háromnál több hibát tartalmazó táblákat kiselejtezik?
 - c. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a 100 tábla hibátlan lesz?
12. Egy szakkollégium vezetője napközben óránként átlagosan két hívást kap a szakkollégium ügyében. Mi annak a valószínűsége, hogy a következő kétórás előadás alatt egy hívás sem érkezik?
13. *Egy radioaktív forrás n részecskét bocsát ki egy bizonyos időintervallum alatt. Egy Geiger- Müller-számláló 10^{-4} valószínűséggel regisztrál minden egyes részecskét. Becsülje meg, hogy legalább hány részecskét kell a forrásnak kibocsátania ahhoz, hogy a számláló 0,99 valószínűséggel legalább négy részecskét regisztráljon egy periódus alatt?
14. Annak a valószínűsége, hogy a KTH egyik pultjához 20 percig nem érkezik senki $e^{-1/2}$.
 - a. Mennyi a valószínűsége, hogy egy óra alatt nem érkezik senki?
 - b. Mi annak a valószínűsége, hogy 90 perc alatt lesz érdeklődő?

Folytonos eloszlások (Egyenletes, exponenciális, normális)

15. Egy ξ valószínűségi változó, amely egy A esemény bekövetkezésének időpontját jelenti, egyenletes eloszlású a $(0, b)$ intervallumon, ahol $b > 1$. Tudjuk, hogy $P(0 < \xi < 1) = 3/4$. Írjuk fel ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét! Számítsuk ki várható értékét és szórását!
16. Egy levél érkezése egy adott időszakban folytonos egyenletes eloszlás szerint várható. Általában március 17-én szokott érkezni, 1 nap átlagos ingadozással. Mi a valószínűsége, hogy a levél március 16. és 22. között érkezik?
17. Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől a szórásánál nagyobb értékkel tér el?
18. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, hogy a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut.
 - a. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hívás 9:30 és 10:00 között érkezik?
 - b. A hívás 9:30-ig nem jött be. Mennyi a valószínűsége, hogy 9:30 és 10:00 között még befut?
19. Legyen ξ a $(0;8)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy 50 független kísérletet elvégezve legfeljebb 3 esik a $(4; 4,5)$ intervallumba?
20. Egy bizonyos típusú televíziós képcső élettartama exponenciális eloszlást követ 5000 óra várható értékkel. Ha a mi televíziónkat már 6000 órát működtettük, mennyi a valószínűsége, hogy fog még 1000 órát működni?
21. Bizonyos típusú izzólámpák tönkremenetelig eltelt használati időtartam hosszát tekintsük a ξ valószínűségi változónak. ξ exponenciális eloszlású, szórása 1000 óra. Határozzuk meg ξ várható értékét, írjuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy egy kiválasztott izzólámpa 3000 órán belül még nem megy tönkre?
22. * Egy szerkezet élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető 1200 óra várható értékkel. A szerkezet használói a szerkezetet átlagosan napi egy órán át üzemeltetik. Milyen hosszú garanciaidőt adjon a gyártó cég, ha az eladott termékek legfeljebb 5%-át akarja cserélni?
23. Egy bizonyos műszer élettartama olyan exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amelynek λ paramétere $1/8$. Ha valaki vesz egy három éves használt készüléket, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az még 8 évig üzemelni fog?
24. * Egy üzletbe a vevők Poisson-eloszlás szerint érkeznek, átlagosan 30 vevő óránként. Mennyi a valószínűsége, hogy két, egymás után érkező vevő érkezési ideje között eltelt idő a) 2 percnél több b) 3 percnél kevesebb c) 1 és 3 perc közé esik?
25. A standard normális eloszlásfüggvény táblázatának segítségével határozza meg a következő valószínűségeket, ha $\xi \in N(6;3)$:
 - a.) $P(\xi > x) = 0,5$ b.) $P(x < \xi < 9) = 0,2$ c.) $P(4,2 < \xi < 6,1) = ?$
26. Egy berendezés élettartama normális eloszlású valószínűségi változó 6,3 év várható értékkel és 2 év szórással. Hány év garanciát adjon a cég a berendezésre, ha a termékek legfeljebb 10 %-ával akar garanciálisan foglalkozni.
27. Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek 400 cm a várható értéke és 3 cm a szórása.
 - a. A deszkák hány százaléka lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?
 - b. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a deszkák hossza 400 cm-től legfeljebb 2.5 cm-rel tér el?
28. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 3$, $\sigma = 2$ paraméterekkel. Hogyan válasszuk meg az A értékét, ha azt akarjuk, hogy a ξ legalább $1/2$ valószínűséggel a $(2, A)$ intervallumba essen?
29. *Egy útkeresztveződésben az átlagos zajszint 45dB. 100 mérés közül kb. tízszer fordul elő, hogy 50 dB fölé emelkedik a zajszint. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 dB alá süllyed a zajszint? Feltételezzük, hogy a zajszint normális eloszlású.

30. Egy céghez a naponta beérkező - meglehetősen nagyszámú - megrendelések száma a tapasztalatok szerint közelítőleg normális eloszlású, $\sigma = 10$ szórással. Mekkora a megrendelések várható száma, ha azt tudjuk az eloszlásról, hogy $P(\xi < 20) = 0.1$?
31. *Egy üzemben egy folyékony termék töltését két automata végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség átlagosan 2 dl és normális eloszlású mindkét gép esetében. A betöltött mennyiség szórása az első gépnél 0.14 dl, a másodikonál pedig 0.08 dl. Az üvegek 60%-át az első gép tölti, a többit a második. Mi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kiválasztva a napi készletből, abban a betöltött folyadék mennyisége a várható értéktől 0.1 dl-nél kevesebbel tér el?
32. Az intelligencia mérésére szolgáló egyik módszerben, az IQ tesztek eredménye olyan normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, amelynek várható értéke 100, a szórása pedig 15. A Mensa klub tagja az lehet, akinek az eredménye a legfelső 2%-ba tartozik.
- Milyen eredményt kell elérni ahhoz, hogy valaki bekerüljön a klubba?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy legalább ekkora pontszámot ér el valaki, ha csak a legalább 100 pontot elért személyek csoportját tekintjük?